Fibrés de Green et régularité des graphes C^0-lagrangiens invariants par un flot de Tonelli

Marie-Claude Arnaud

6 mars 2008

Abstract

In this article, we prove different results concerning the regularity of the C^0-Lagrangian invariant graphs of the Tonelli flows. For example :

- in dimension 2 and in the autonomous generic case, we prove that such a graph is in fact C^1 on some set with (Lebesgue) full measure;
- under certain dynamical additional hypothesis, we prove that these graphs are C^1.

Résumé

Dans cet article, on démontre différents résultats concernant la régularité des graphes C^0-lagrangiens invariants par des flots de Tonelli. Par exemple :

- en dimension 2, dans le cas autonome et générique, on montre que ces graphes sont de classe C^1 sur un ensemble de mesure (de Lebesque) pleine ;
- sous certaines hypothèses concernant la dynamique restreinte, on montre que ces graphes sont de classe C^1.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Préambule

Dans cet article, nous nous intéressons à la régularité des graphes C^0-lagrangiens invariants par un flot de Tonelli, ou, ce qui revient au même, à la régularité des solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi associée à un hamiltonien de Tonelli.

Il est bien connu que de telles solutions sont de classe $C^{1,1}$ (i.e. que le graphe C^0-lagrangien correspondant est lipschitz). Ce résultat est montré par A. Fathi dans [Fa1] (nous renvoyons à la section 4 pour plus de détails). Avant lui, et dans un cadre un peu différent, le même résultat avait été obtenu par :

- G. D. Birkhoff dans le cas des applications de l'anneau déviant la verticale (voir par exemple [He3]) ;
- M. Herman dans le cas des difféomorphismes symplectiques du fibré cotangent $T^*\mathbb{T}^n$ du tore qui admettent une fonction génératrice globale (voir [He2]).

Citons aussi les beaux résultats de J. Mather concernant les mesures minimisantes, résultats contenus dans l'article [Mat1] et qui ont des liens certains avec ceux que nous venons de citer.

On se demande alors si on peut dire plus sur la régularité de ces solutions, sous diverses hypothèses : dynamiques, de dimension...

Avant de parler des résultats que nous obtenons dans ce sens, nous allons rappeler quelques définitions et notations.

1.2 Notations et définitions

Dans toute la suite, M sera une variété compacte et connexe munie d'une métrique riemannienne. Un point du fibré tangent TM sera noté (x, v) avec $x \in M$ et v vecteur tangent en x. La projection $\pi : TM \to M$ s'écrit alors $(x, v) \to x$. Un point du fibré cotangent T^*M sera noté (x, p) avec $p \in T_x^*M$ et $\pi^* : T^*M \to M$ désignera la projection canonique $(x, p) \to x$.

On s'intéresse alors à un lagrangien $L : TM \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui est de classe au moins C^2 et :

- uniformément superlinéaire : uniformément en $(x,t)\in M\times\mathbb{T}$, on a : $\displaystyle\lim_{\|v\|\to+\infty}\frac{L(x,v;t)}{\|v\|}=+\infty$;
- strictement convexe : pour tout $(x,v;t)\in TM\times\mathbb{T}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v;t)$ est définie positive ;
- complet.

Un tel lagrangien sera appelé un "*lagrangien de Tonelli*".

On peut associer à un tel lagrangien l'application de Legendre $\mathcal{L}=\mathcal{L}_L : TM\times\mathbb{T}\to T^*M\times\mathbb{T}$ definie par : $\mathcal{L}(x,v;t)=\frac{\partial L}{\partial v}(x,v;t)$ qui est un difféomorphisme fibré de classe C^1 et un hamiltonien $H: T^*M\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ défini par : $H(x,p;t)=p\left(\mathcal{L}^{-1}(x,p;t)\right)-L(\mathcal{L}^{-1}(x,p;t))$. Le hamiltonien H est alors uniformément superlinéaire, strictement convexe dans la fibre, de classe C^2 et complet (un tel hamiltonien sera dit de Tonelli). Tout comme à un lagrangien de Tonelli on peut associer un hamiltonien de Tonelli, à chaque hamiltonien de Tonelli on peut associer un lagrangien de Tonelli. On notera alors $(f^L_{t,s})$ le flot d'Euler-Lagrange associé à L et $(\Phi^H_{t,s})$ le flot hamiltonien associé à H ; on a alors : $\Phi^H_{t,s}=\mathcal{L}\circ f^L_{t,s}\circ\mathcal{L}^{-1}$.

Suivant [He2], on appellera *"graphe C^0-lagrangien"* le graphe d'une 1-forme $\lambda : M\to T^*M$ qui est continue et fermée au sens des distributions. Remarquons à ce sujet que tout au long de l'article nous parlerons de "graphe", comme c'est l'usage, alors qu'il serait sans doute plus correct de parler de section du fibré cotangent.
Les résultats que nous obtenons sont alors les suivants :

1.3 Résultats

Théorème 1. [1] *Soit M une variété de dimension 2, $L : TM\to\mathbb{R}$ un lagrangien indépendant du temps satisfaisant les hypothèses de Tonelli, $H : T^*M\to\mathbb{R}$ le hamiltonien qui lui est associé dont on suppose que toutes les singularités sont non dégénérées.*
Soit $\mathcal{G}$ un graphe C^0-lagrangien invariant par le flot hamiltonien de H. Soit λ la 1-forme fermée (au sens des distributions) dont $\mathcal{G}$ est le graphe.
Alors, il existe un G_δ dense D de mesure pleine de M tel qu'en tout point de D, λ est différentiable et $D\lambda$ est continue.

Signalons qu'"avoir toutes ses singularités non dégénérées" est une condition générique pour les hamiltoniens de classe C^2 (et même de classe C^k avec $k\geq 2$). Nous renvoyons le lecteur à la sous-section 4.2.2 pour la définition précise.
Ce théorème nous dit donc que pour les hamiltoniens génériques des fibrés cotangents des surfaces, les graphes C^0-lagrangiens invariants par le flot hamiltonien sont plus réguliers que simplement lipschitz, puisqu'ils sont de classe C^1 sur un ensemble de (Lebesgue) mesure pleine.
Nous donnons en fin de sous-section 4.2.2 des exemples qui montrent pourquoi notre démonstration de ce résultat n'est pas valable en dimension plus grande. Mais nous ne connaissons pas de contre-exemple au résultat en dimension plus grande, et il serait intéressant de pouvoir en exhiber.
Le cas des hamiltoniens dépendant du temps sur $T^*\mathbb{T}$ est similaire, et a déjà été traité dans [Arn1]. Nous nous contentons de le rappeler :
Théorème ([Arn1])*Soit $L : T\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^1\to\mathbb{R}$ un lagrangien satisfaisant les hypothèses de Tonelli, $H : T^*\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^1\to\mathbb{R}$ le hamiltonien qui lui est associé et $\mathcal{G}$ un graphe continu invariant par le*

[1] Une version plus précise de ce résultat se trouve en sous-section 4.2.2 sous le nom de proposition 4.18.

temps 1 du flot hamiltonien de H. On suppose que ce graphe invariant est le graphe de λ. Alors il existe un G_δ dense D de mesure pleine de $\mathbb{T}$ tel qu'en tout point de D, λ est différentiable et $D\lambda$ est continue.

Donnons maintenant les résultats que nous obtenons en faisant des hypothèses sur la dynamique :

Théorème 2. [2] *Soit $L : T\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ un lagrangien satisfaisant les hypothèses de Tonelli, $H : T^*\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ le hamiltonien qui lui est associé et $\mathcal{G}$ un graphe C^0-lagrangien invariant par le temps 1 du flot hamiltonien de H. On suppose que le temps 1 du flot hamiltonien de H restreint à $\mathcal{G}$ est bi-lipschitz conjugué à une rotation.*
Alors le graphe $\mathcal{G}$ est de classe C^1.

Dans le cas de la dimension 1, on obtient un résultat plus précis :

Proposition 1.1. [3] *Soit $L : T\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ un lagrangien satisfaisant les hypothèses de Tonelli, $H : T^*\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ le hamiltonien qui lui est associé et $\mathcal{G}$ un graphe continu invariant par le temps 1 du flot hamiltonien de H. On suppose que le temps 1 du flot hamiltonien de H restreint à $\mathcal{G}$ est bi-lipschitz conjugué à un difféomorphisme du cercle de classe C^2 de nombre de rotation irrationnel.*
Alors le graphe $\mathcal{G}$ est de classe C^1

Enfin, le dernier résultat que nous obtenons concerne les hamiltoniens C^0-intégrables. Brièvement, un hamiltonien $H : T^*M \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dit C^0 intégrable s'il existe une partition $\mathcal{P}$ de T^*M en graphes C^0-lagrangiens invariants par le temps 1 du flot hamiltonien telle que de plus l'application qui à un élément de $\mathcal{P}$ associe sa classe de cohomologie est surjective sur $H^1(M, \mathbb{R})$.

Théorème 3. *Soit $H : T^*M \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ un hamiltonien de Tonelli C^0-intégrable et $\Lambda_1 \subset \Lambda(M)$ tel que $\{\mathcal{G}_\lambda; \lambda \in \Lambda_1\}$ soit une partition de T^*M en graphes C^0 lagrangiens invariants par le temps 1 du flot hamiltonien (ϕ_t^H) de H.*
Alors, il existe un G_δ dense $G(H)$ de Λ_1 dont tout élément est de classe C^1.

Remarquons que nous ne connaissons pas d'exemple de hamiltonien C^0-intégrable qui ne soit pas C^1-intégrable... Aussi, il serait intéressant soit d'en donner un exemple, soit d'améliorer le résultat du théorème précédent en montrant qu'un hamiltonien C^0-intégrable est C^1-intégrable.

1.4 Arguments-clefs des démonstrations

Rappelons quelle est l'idée géométrique qui permet de montrer des inégalités à priori sur les graphes lagrangiens lipschitziens invariants par un flot de Tonelli (voir [He3] en dimension quelconque, ou [He2] pour le cas de l'anneau) : il est usuel d'utiliser l'image par le flot de Tonelli linéaire (i.e. la différentielle du flot de Tonelli hamiltonien) de la *verticale* $V(x, p) = \ker D\pi^*(x, p)$. Il se trouve que cette verticale est un plan lagrangien, et qu'il existe une manière classique de comparer entre eux différents plans lagrangiens transverses à un plan lagrangien donné [4]. Pour montrer des inégalités à priori, on "coince" alors le tangent au graphe invariant (aux points de différentiabilité du graphe lipschitz, qui est un ensemble de mesure pleine) entre deux images (l'une en temps positif, l'autre en temps négatif) de la verticale.

[2] Ce résultat se retrouve dans le corps de l'article sous le nom de corollaire 4.13, en sous-section 4.2.
[3] Ce résultat se retrouve dans le corps de l'article sous le nom de corollaire 4.14, en sous-section 4.2.
[4] Ceci est détaillé en sous-section 3.1

Une idée extrêment naturelle est alors d'utiliser toutes les images des verticales (i.e. pour des temps quelconques) pour coincer ce plan tangent au graphe, puis de passer à la limite. On trouve alors deux fibrés lagrangiens au dessus des points de différentiabilité du graphe, qui s'appellent les *fibrés de Green* : ceci est détaillé en sous-section 3.2. Ces fibrés furent introduits par Leon W. Green dans [Gr] dans le cas du flot géodésique d'une métrique riemannienne, puis généralisés au cas des métriques finsleriennes par Patrick Foulon dans [Fo1], au cas des hamiltoniens autonomes optiques par Gonzalo Contreras et Renato Iturriaga dans [C-I] et enfin au cas des applications symplectiques de $T^*\mathbb{T}^d$ déviant la verticale par Misha Bialy et Robert S. Mackay dans [Bi-Ma]. Ils ont été utilisés pour montrer des résultats de rigidité, des résultats sur l'hyperbolicité, mais à notre connaissance l'usage que nous en faisons ici, pour encadrer des plans tangents, et même, ainsi que nous le verrons lors de la sous-section 4.1, des cônes tangents (c'est une généralisation, empruntée à l'optimisation non lisse, de la notion de plan tangent), est nouvelle. Aux points où les deux fibrés de Green coïncident, on arrive alors à montrer que le graphe admet continument un plan tangent, i.e. un résultat de régularité C^1. Un étude fine des fibrés de Green permet alors, sous des hypothèses variées (de dimension, dynamiques...), de montrer qu'ils coïncident en de nombreux points (voir le critère dynamique des sous-sections 3.5 et 3.6).

Enfin, signalons que les arguments utilisés sont des arguments classiques des dynamiques lagrangienne et hamiltonniennes : notion de point conjugué, de plan lagrangien, de solution de l'équation de Hamilton-Jacobi...sauf en ce qui concerne la démonstration du théorème 3, en sous-section 4.2.3, dont les arguments font de plus appel aux récentes théories K.A.M. faible développées par A. Fathi et P. Bernard (voir [Fa2] et [Be2]) et aux théories concernant les mesures minimisantes développées par J. Mather (voir [Mat1]).

1.5 Plan de l'article

Tout le début de l'article sert à étudier des fibrés (non forcément continus) lagrangiens ; c'est dans ce but qu'en section 2, on définit une notion de semi-continuité sur les champs de formes quadratiques, après avoir défini une relation d'ordre sur l'ensemble de ces champs, relation qui permettra en sous-section 3.1 de comparer entre eux des plans lagrangiens et de parler de fibrés lagrangiens semi-continus.

Dans le reste de la section 3, on construit les fibrés de Green le long des orbites sans points conjugués, puis on montre différents résultats concernant ces fibrés :

- on montre qu'ils sont semi-continus ;
- on explique qu'ils servent à encadrer les fibrés lagrangiens invariants par le flot hamiltonien qui sont transverses à la verticale (sous-section 3.4) ;
- on explique comment la dynamique du flot linéarisé (et plus spécifiquement la détermination de vecteurs dont l'orbite ne sort pas de tout compact) permet de trouver des vecteurs des fibrés de Green : ce résultat s'appelle le critère d'appartenance aux fibrés de Green (section 3.5) ;
- en passant au quotient par la direction du champ de vecteurs hamiltonien, on construit, dans le cas autonome, des fibrés de Green "réduits".

En sous-section 4.1, on introduit une notion de différentielle généralisée (empruntée à l'optimisation non lisse) et de cône tangent à un graphe lipschitz. On explique alors pourquoi ces cônes tangents sont eux-aussi encadrés par les fibrés de Green.

Enfin, en sous-section 4.2, on démontre tous les résultats annoncés précédemment qui concernent la régularité des graphes C^0-lagrangiens invariants.

Remerciements : cet article n'aurait pas existé sans les enrichissants exposés concernant les tores invariants des difféomorphismes symplectiques donnés par Michel Herman à son séminaire à Paris 7. Sans une remarque limpide de Sylvain Crovisier concernant l'interprétation géométrique en dimension 1 du critère dynamique d'appartenance aux fibrés de Green, la démonstration de ce critère aurait été beaucoup plus lourde, et je l'en remercie. Je remercie aussi Jean-Christophe Yoccoz pour m'avoir indiqué certains résultats concernant les difféomorphismes du cercle et du tore. Enfin, merci aux organisateurs des Atelier sur les aspects mathématiques de la mécanique céleste qui ont eu lieu à l' Institut Henri Poincaré en décembre 2007 de m'avoir donné l'occasion de faire un mini-cours sur les notions développées dans cet article. Merci aussi au referee de cet article pour ses remarques et corrections.

2 Semi-continuité des champs de formes quadratiques

Nous intéressant à des fibrés lagrangiens transverses à la verticale, nous serons amenés à étudier des champs de formes quadratiques (en effet, un plan lagrangien peut être vu, en coordonnées symplectiques, comme le graphe d'une matrice symétrique).

Notation 1. *Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $Q(E)$ est l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E et $Q_+(E)$ est le cône des formes quadratiques définies positives sur E.*

Définition 2.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et q_1, q_2 deux formes quadratiques sur E. On écrit : $q_1 \prec q_2$ si : $\forall v \in E, q_1(v) \leq q_2(v)$. On écrit : $q_1 \ll q_2$ si $q_2 - q_1$ est définie positive. Une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. strictement croissante) si : $\forall n \in \mathbb{N}, q_n \prec q_{n+1}$ (resp. $q_n \ll q_{n+1}$).*

Remarques 2.2. *Si $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $Q(E)$, on a : $\forall n \leq n', q_n \prec q_{n'}$.*
La relation $\prec$ est transitive ; c'est même une relation d'ordre (partiel) sur $Q(E)$.

Définition 2.3. *Soit $\pi : F \to B$ un fibré vectoriel topologique dont la fibre $F_x = \pi^{-1}(x)$ est de dimension constante finie (par souci de concision, désormais, on dira juste "fibré vectoriel"). On appelle champ de formes quadratiques sur F une application q définie sur la base B telle que : $\forall x \in B, q(x) \in Q(F_x)$.*

Remarques 2.4. *En d'autres termes, si $\Pi : Q(F) \to B$ désigne le fibré vectoriel des formes quadratiques dans la fibre de F, un champ de formes quadratiques sur F est une section de Π. On note $\mathcal{Q}(F)$ l'ensemble des champs de formes quadratiques de F.*

Notation 2. *On note alors $\mathcal{Q}_c(F)$ l'ensemble des champs continus de formes quadratiques sur F.*
De plus, $\mathcal{Q}_+(F)$ désignera l'ensemble des éléments de $\mathcal{Q}(F)$ dont la restriction à chaque fibre est définie positive.

Nous introduisons une notion de semi-continuité analogue à celle concernant les fonctions à valeurs réelles :

Définition 2.5. *Soit q un champ de formes quadratiques sur le fibré vectoriel $\pi : F \to B$. Ce champ q est semi-continu supérieurement (resp. semi-continu inférieurement) si pour tout champ de formes quadratiques* continu *$f : B \to \mathcal{Q}(F)$ de F, l'ensemble $\{x \in B; q(x) \ll f(x)\}$ est ouvert dans B (resp. $\{x \in B; q(x) \gg f(x)\}$ est ouvert dans B).*

Remarque 2.6. *Remarquons que q est semi-continue supérieurement si et seulement si $-q$ est semi-continue inférieurement.*

En utilisant la remarque suivante :

Remarque 2.7. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si q_0 est une forme quadratique sur E, une base de voisinages ouverts de q_0 dans $Q(E)$ est $(U_\varepsilon)_{\varepsilon \in Q_+(E)}$ où $U_\varepsilon = \{q \in Q(E); q_0 - \varepsilon \ll q \ll q_0 + \varepsilon\}$.*

On montre :

Proposition 2.8. *On suppose que la base B du fibré vectoriel $\pi : F \to B$ est un espace normal (par exemple un espace métrique ou un espace compact). Soit q un champ de formes quadratiques sur le fibré vectoriel $\pi : F \to B$. Alors, q est continue si et seulement si elle est semi-continue supérieurement et inférieurement.*

Démonstration de la proposition 2.8 : Un champ de formes quadratiques qui est continu est toujours semi-continu inférieurement et supérieurement (pour cette implication, on n'a pas besoin de supposer que B soit normal).
Supposons maintenant que q soit un champ de formes quadratiques qui est à la fois semi-continu inférieurement et supérieurement. Soit $x \in B$; il existe alors un voisinage ouvert U de x dans B et un homéomorphisme $H : U \times F_x \to V$ de $U \times F_x$ dans l'ouvert $V = \pi^{-1}(U)$ de F tel que : $\forall (y, v) \in U \times F_x, \pi \circ H(y, v) = y$. Comme B est normal, on peut à l'aide du théorème de Tietze-Urysohn construire une fonction continue $\eta : B \to [0, 1]$ qui vaut 1 sur un voisinage de x et qui est nulle en dehors de U. Si maintenant σ est une forme quadratique définie positive sur F_x, on définit $q_-, q_+ \in \mathcal{Q}_c(F)$ comme suit : pour tout $y \in U$: $\forall v \in F_y, q_-(y)(v) = \eta(y)(q(x) - \sigma)(p_2 \circ H^{-1}(v))$ (et $q_+(y)(v) = \eta(y)(q(x) + \sigma)(p_2 \circ H^{-1}(v))$) où $p_2 : U \times F_x \to F_x$ est la projection $(y, v) \to v$ et pour $y \notin U$: $q_-(y)(v) = q_+(y)(v) = 0$. Comme q est semi-continue supérieurement et inférieurement, l'ensemble : $\{y \in B; q_-(y) \ll q(y) \ll q_+(y)\}$ est un ouvert qui contient x. Ceci joint à la remarque 2.7 nous permet de conclure. $\square$

De même :

Proposition 2.9. *Soit $\pi : F \to B$ un fibré vectoriel et soit $\mathcal{E}$ une partie de $\mathbb{R}$ (totalement) ordonnée par $\leq$ ou $\geq$ (on note $\dashv$ son ordre, qui est donc $\leq$ ou $\geq$) et $(q_t)_{t \in \mathcal{E}}$ une famille croissante de champs de formes quadratiques sur F, c-à-d : $\forall t, t' \in \mathcal{E}, t \dashv t' \Rightarrow q_t \prec q_{t'}$. On suppose que chaque q_t est semi-continue supérieurement et que : $\forall x \in B, \forall v \in F_x, \inf\limits_{t \in \mathcal{E}} q_t(x)(v)$ est fini. On note : $q(x)(v) = \inf\limits_{t \in \mathcal{E}} q_t(x)(v)$; q est alors un champ de formes quadratiques qui est semi-continu supérieurement.*

Remarque 2.10. *On montre de même qu'un supremum de champs de formes quadratiques semi-continues inférieurement est semi-continu inférieurement.*

Démonstration de la proposition 2.9 : Avec les notations de la proposition, q est un champ de formes quadratiques. Il reste à montrer qu'il est semi-continu supérieurement.
Soit f un champ continu de formes quadratiques sur F. Soit $x \in B$. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- $q(x) \ll f(x)$;
- $\forall v \in F_x \backslash \{0\}, \inf_{t \in \mathcal{E}} q_t(x)(v) < f(x)(v)$;
- $\forall v \in F_x \backslash \{0\}, \exists t \in \mathcal{E}, q_t(x)(v) < f(x)(v)$.

Montrons alors qu'on peut choisir le t de l'assertion précédente indépendamment de v ; notons $T = \inf_{\dashv} \mathcal{E}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour $\dashv$) d'éléments de $\mathcal{E}$ qui a pour limite T (T peut être infini). On déduit du fait que (q_t) est croissante que : $\forall v \in F_x, q(x)(v) = \lim_{n \to \infty} q_{T_n}(x)(v)$. La suite $(q_{T_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante d'éléments de $Q(F_x)$ qui converge simplement en décroissant vers $q(x)$; elle y converge donc uniformément sur les compacts (l'espace vectoriel F_x est de dimension finie), ce qui nous dit bien que t est indépendant de v ; on peut alors poursuivre la suite d'assertions équivalentes :

- $\exists t \in \mathcal{E}, \forall v \in F_x \backslash \{0\}, q_t(x)(v) < f(x)(v)$;
- $\exists t \in \mathcal{E}, q_t(x) \ll f(x)$;
- $x \in \bigcup_{t \in \mathcal{E}} \{y \in B; q_t(x) \ll f(x)\}$.

Cette dernière condition est bien ouverte car chaque q_t est semi-continu supérieurement. □

Donnons maintenant un résultat qui est une version adaptée à notre cas du théorème de Dini ; pour l'énoncer, on a besoin d'une définition :

Définition 2.11. *Si $\pi : F \to B$ est un fibré vectoriel dont la base B est* compacte *et si $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de champs de formes quadratiques sur F, on dira que (q_n) converge* uniformément *vers le champ de formes quadratiques q sur F si pour tout champ de formes quadratiques $\varepsilon \in \mathcal{Q}_c(F)$ sur F qui est défini positif sur chaque fibre, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\forall n \geq N, \forall x \in B, q(x) - \varepsilon(x) \ll q_n(x) \ll q(x) + \varepsilon(x).$$

Il existe bien entendu une version de cette définition et de la proposition qui suit pour les familles (non forcément indexées par $\mathbb{N}$) de champs de formes quadratiques.

Proposition 2.12. *Soit $\pi : F \to B$ un fibré vectoriel dont la base est* compacte *et soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de champs de formes quadratiques sur F telle que chaque q_n est semi-continue supérieurement. On suppose de plus que pour chaque $x \in B$, pour chaque $v \in F_x$, la quantité $q(x)(v) = \inf_{n \in \mathbb{N}} q_n(x)(v)$ est finie : q est alors un champ de formes quadratiques sur F qui est semi-continu supérieurement.*
Si de plus q est continu, on a convergence uniforme de (q_n) vers q.

Démonstration de la proposition 2.12 : Elle s'inspire de celle du théorème classique de Dini. Fixons un champ continu de formes quadratiques ε sur F qui est défini positif sur chaque fibre et définissons pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

$$O_n = \{x \in B; q_n(x) - q(x) \ll \varepsilon(x)\} = \{x \in B; q_n(x) \ll \varepsilon(x) + q(x)\}$$

Chaque q_n étant semi-continue supérieurement et $q+\varepsilon$ étant continue, chaque O_n est ouvert. De plus, les O_n forment un recouvrement du compact B. La suite O_n étant de plus croissante (car (q_n) est décroissante), on en déduit l'existence d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que $B = O_N$, et donc par la décroissance de la suite (q_n) :

$$\forall n \geq N, \forall x \in B, q(x) \prec q_n(x) \ll q(x) + \varepsilon(x).$$

□

Une autre proposition nous sera utile :

Proposition 2.13. *On suppose que la base B de F est normale. Une somme finie de champs de formes quadratique semi-continus supérieurement (resp. inférieurement) est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement).*

Remarque 2.14. *Il est immédiat qu'un multiple par un réel strictement positif d'un champ de formes quadratiques semi-continu supérieurement est semi-continu supérieurement.*

Démonstration de la proposition 2.13 : Soient q_1, q_2 deux champs de formes quadratiques semi-continus supérieurement sur le fibré vectoriel $\pi : F \to B$, soit f un champ de formes quadratiques continu sur F et soit $x \in B$ tel que : $q_1(x) + q_2(x) \ll f(x)$. On cherche un voisinage V de x dans B tel que : $\forall y \in V, q_1(y) + q_2(y) \ll f(y)$.
On utilise alors deux formes quadratiques r_1 et r_2 définies sur F_x telles que : $q_1(x) \ll r_1$, $q_2(x) \ll r_2$ et $r_1 + r_2 \ll f(x)$. En utilisant la définition de fibré vectoriel et une fonction plateau sur B qui vaut 1 en x et 0 en dehors d'un petit voisinage de x (on utilise ici le théorème de Tietze-Urysohn et donc le fait que B est normal, comme dans la proposition 2.8), on prolonge r_1 et r_2 en des champs de formes quadratiques R_1 et R_2 continus. Alors, l'ouvert $\{y \in B; q_1(y) \ll R_1(y)\} \cap \{y \in B; q_2(y) \ll R_2(y)\} \cap \{y \in B; R_1(y) + R_2(y) \ll f(y)\}$ répond à la question.

□

Avec notre notion de semi-continuité, on obtient un autre résultat, lui aussi similaire à ceux qui concernent les fonctions semi-continues à valeurs réelles :

Proposition 2.15. *Soit $\pi : F \to B$ un fibré vectoriel dont la base B est normale tel que $\mathcal{Q}_+(F) \cap \mathcal{Q}_c(F) \neq \emptyset$. Soient q_- et q_+ deux champs de formes quadratiques de F qui vérifient les hypothèses suivantes :*

- *q_+ est semi-continue supérieurement ;*
- *q_- est semi-continue inférieurement ;*
- *$q_- \prec q_+$.*

Alors, si $G = \{x \in B; q_-(x) = q_+(x)\}$, G est un G_δ de B.
Si de plus B est normal,et si $q \in \mathcal{Q}(F)$ est tel que $q_- \prec q \prec q_+$, alors q est continue en tout point de G ; par exemple, q_- et q_+ sont continues en tout point de G.

Remarque 2.16. *On peut se demander si l'hypothèse $\mathcal{Q}_+(F) \cap \mathcal{Q}_c(F) \neq \emptyset$ n'est pas redondante. Sur le fibré tangent d'une variété (le cas qui nous intéresse), elle est automatique (c'est l'existence d'une métrique riemannienne). Plus généralement, si on suppose que B est à la fois paracompact et normal, on a l'existence d'un recouvrement localement fini de B par des ouverts (U_i) tel que chaque $\pi^{-1}(U_i)$ soit un fibré trivial, donc admette un $q_i \in \mathcal{Q}_+(\pi^{-1}(U_i)) \cap \mathcal{Q}_c(\pi^{-1}(U_i))$. On utilise alors une partition de l'unité subordonnée à (U_i) ; $\alpha_i : B \to [0,1]$ avec $\mathrm{supp}\alpha_i \subset U_i$ pour construire $q = \sum \alpha_i q_i \in \mathcal{Q}_+(F) \cap \mathcal{Q}_c(F)$.*

Démonstration de la proposition 2.15 : Soit $\varepsilon \in \mathcal{Q}_+(F)\cap\mathcal{Q}_c(F)$. On a : $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} G_n$ où $G_n = \{x \in B; q_+(x) - q_-(x) \ll \frac{1}{n}\varepsilon(x)\}$; comme $q_+ - q_-$ est semi-continue supérieurement (par la proposition 2.13), chaque G_n est ouvert et G est donc bien un G_δ.
Soit maintenant $x \in G$. On adapte la démonstration de la proposition 2.8 à notre cas (en fait la proposition 2.8 est un cas particulier de ce que nous sommes en train de montrer). Etant donné $\varepsilon \in Q_+(F_x)$, on peut comme dans la proposition 2.8 construire deux champs continus q'_- et q'_+ de formes quadratiques sur F telles que : $q(x) - \varepsilon = q'_-(x) \ll q(x) \ll q'_+(x) = q(x) + \varepsilon$. Comme q_+ est semi-continue supérieurement et q_- est semi-continue inférieurement, l'ensemble : $\{y \in B; q'_-(y) \ll q_-(y) \prec q_+(y) \ll q'_+(y)\}$ est un ouvert qui contient x et qui est contenu dans $\{y \in B; q_-(y) \ll q(y) \ll q_+(y)\}$ puisque $q_- \prec q \prec q_+$. Aussi, $\{y \in B; q_-(y) \ll q(y) \ll q_+(y)\}$ est un voisinage de x. Ceci joint à la remarque 2.7 nous permet de conclure. □

Remarque 2.17. *En fait, on a dans la proposition précédente montré un résultat d'* équicontinuité *: tous les q tels que $q_- \prec q \prec q_+$ forment une famille qui est équicontinue sur G.*

3 Les fibrés de Green

Ainsi que nous l'avions annoncé au début de la section précédente, nous allons utiliser les champs de formes quadratiques pour représenter des fibrés lagrangiens transverses à la “verticale”.

3.1 Comparaison des sous-espaces lagrangiens à l'aide de formes quadratiques

Il est très classique d'utiliser des matrices symétriques pour représenter des sous-espaces vectoriels lagrangiens ; la nouveauté de ce que nous faisons est que nous n'avons pas besoin de fixer de sous-espace lagrangien “horizontal” pour définir nos formes quadratiques. Il semble en effet raisonnable que si on s'est fixé une “verticale”, on n'ait pas besoin de dire ce qu'est une “horizontale” pour comparer deux sous-espaces lagrangiens transverses à la verticale.

Définition 3.1. *Soit (E, Ω) un espace vectoriel symplectique de dimension finie et V un sous-espace lagrangien fixé de E. On note $p : E \to E/V$ la projection canonique. Si L_1 et L_2 sont deux sous-espaces lagrangiens de E transverses à V, on définit une forme quadratique $Q(L_1, L_2)$ sur E/V par :*

$$\forall w \in E/V, Q(L_1, L_2)(w) = \Omega(\left(p_{|L_1}\right)^{-1}(w), \left(p_{|L_2}\right)^{-1}(w)).$$

Cette forme quadratique s'appelle alors hauteur de L_2 au dessus de L_1 *(relativement à V).*

Si on se fixe V (que nous appellerons plus tard la “verticale”) et L_1 (l'“horizontale”), la donnée de cette hauteur détermine L_2 :

Proposition 3.2. *Soit (E, Ω) un espace vectoriel symplectique de dimension finie et V un sous-espace lagrangien fixé de E. Notons $\mathcal{L}_V(E)$ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de E qui sont transverses à V et fixons $L \in \mathcal{L}_V(E)$. Alors, l'application $Q(L, .) : \mathcal{L}_V(E) \to Q(E/V)$ qui à $L' \in \mathcal{L}_V(E)$ associe $Q(L, L')$ est une bijection.*
De plus, on a : $L \cap L' = p_{|L}^{-1}(\ker Q(L, L')) = p_{|L'}^{-1}(\ker Q(L, L'))$.

Remarque 3.3. *1. Si on munit les deux ensembles de leurs topologies usuelles, cette application est un homéomorphisme ;*

2. de la dernière phrase de cet énoncé, on déduit que L est tranverse à L' si et seulement si $Q(L,L')$ n'est pas dégénérée.

Démonstration de la proposition 3.2 : Fixons V et L comme dans l'énoncé, et considérons $q \in Q(E/V)$. On note alors $\ell = \left(p_{|L}\right)^{-1}$: c'est un isomorphisme de E/V sur L. On cherche alors tous les $L' \in \mathcal{L}_V(E)$ tels que $Q(L,L') = q$.
On commence par remarquer que si $L' \in \mathcal{L}_V(E)$, il s'écrit de façon unique comme $\{\ell(x) + v(\ell(x)); x \in E/V\}$ où $v\ : L \to V$ est une application linéaire telle que : $\forall x,y \in E/V, \Omega(\ell(x) + v(\ell(x)), \ell(y) + v(\ell(y))) = 0$. De plus, comme L,L' et V sont lagrangiens :

$$\forall x,y \in E/V, 0 = \Omega(\ell(x) + v(\ell(x)), \ell(y) + v(\ell(y))) = \Omega(\ell(x), v(\ell(y))) - \Omega(\ell(y), v(\ell(x)))$$

donc la forme bilinéaire symétrique associée à $Q(L,L')$ est : $\varphi(L,L')(x,y) = \Omega(\ell(x), v(\ell(y))) = \Omega(\ell(y), v(\ell(x)))$. L'application ℓ étant un isomorphisme de E/V sur L, si on définit $\psi(L,L')$ par $\psi(L,L') = \varphi(L,L') \circ (p_{|L}, p_{|L})$, alors $\psi(L,L')$ est une forme bilinéaire symétrique et la correspondance est un isomorphisme de l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E/V sur l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur L. On a de plus : $\forall x,y \in L, \psi(L,L')(x,y) = \Omega(x, v(y))$. Or, Ω étant symplectique et V et L des espaces lagrangiens transverses, l'application : $\Omega^*\ : V \to L^*$ qui à $x \in V$ associe $\Omega(.,x) \in L^*$ est un isomorphisme. On en déduit que pour toute forme bilinéaire symétrique ψ de L, il existe une unique application linéaire $v\ : L \to V$, définie par $v(x) = (\Omega^*)^{-1}(\psi(.,x))$ telle que : $\forall y \in L, \psi(y,x) = \Omega(y, v(x))$. Du fait que ψ est symétrique, on déduit : $\forall x,y \in L, \Omega(x, v(y)) = \Omega(y, x(x))$, donc que l'ensemble $\{x + v(x); x \in L\}$ est un sous-espace lagrangien de E, ce qui permet de conclure que $Q(L,.)$ est bien une bijection.
De plus, il vient alors immédiatement que $L \cap L' = \{\ell(x); x \in E/V, v(\ell(x)) = 0\} = \{\ell(x) + v(\ell(x)); x \in E/V, v(\ell(x)) = 0\}$. Comme la forme bilinéaire symétrique associée à $Q(L,L')$ est : $\varphi(L,L')(x,y) = \Omega(\ell(x), v(\ell(y))) = \Omega(\ell(y), v(\ell(x)))$; le fait que $\ker \varphi(L,L') = p(\ker v)$ en découle immédiatement. $\square$

Proposition 3.4. *Soit (E,Ω) un espace vectoriel symplectique de dimension finie et V un sous-espace lagrangien fixé de E. On a :*

- $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}_V(E), Q(L_1,L_2) = -Q(L_2,L_1)$;
- $\forall L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}_V(E), Q(L_1,L_2) + Q(L_2,L_3) = Q(L_1,L_3)$.

Démonstration de la proposition 3.4 : Le premier point résulte de l'antisymétrie de la forme symplectique Ω.
Montrons le second point. Soient donc $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}_V(E)$. Etant donné $x \in E/V$, convenons de noter :

- $\left(p_{|L_2}\right)^{-1}(x) = \ell_2(x)$;
- $\left(p_{|L_3}\right)^{-1}(x) = \ell_2(x) + v_3(x)$; on a alors : $v_3(x) \in V$;
- $\left(p_{|L_1}\right)^{-1}(x) = \ell_2(x) + v_1(x)$; on a alors : $v_1(x) \in V$;

et calculons :

$$Q(L_1,L_2)(x) + Q(L_2,L_3)(x) = \Omega(\ell_2(x) + v_1(x), \ell_2(x)) - \Omega(\ell_2(x) + v_3(x), \ell_2(x))$$

$$= \Omega(v_1(x) - v_3(x), \ell_2(x)) = \Omega(v_1(x) + \ell_2(x), v_3(x) + \ell_2(x)) = Q(L_1, L_3)(x).$$

$\square$

Définition 3.5. *Soit (E, Ω) un espace vectoriel symplectique de dimension finie et V un sous-espace lagrangien fixé de E. Si $L, L' \in \mathcal{L}_V(E)$, on dira que L' est au dessus (resp. strictement au dessus) de L si $0 \prec Q(L, L')$ (resp. $0 \ll Q(L, L')$). Il nous arrivera d'écrire $L \prec L'$ (resp. $L \ll L'$).*

Remarquons que "être au dessus" est une relation d'ordre (partiel) sur $\mathcal{L}_V(E)$ (la transitivité se déduit du deuxième point de 3.4). On peut alors parler de *famille croissante* d'éléments de $\mathcal{L}_V(E)$. On peut aussi bien entendu parler de fibré *semi-continus* de sous-espaces lagrangiens transverses à la verticale.

3.2 Construction des fibrés de Green pour les orbites sans points conjugués

Nous allons maintenant utiliser à la fois la représentation des sous-espaces lagrangiens et les résultats que nous avons démontrés en section 2 concernant les champs de formes quadratiques pour construire sur T^*M les fibrés de Green au dessus des orbites minimisantes d'un lagrangien de Tonelli.

Ces fibrés furent introduits par Leon W. Green dans [Gr] dans le cas du flot géodésique d'une métrique riemannienne, puis généralisés au cas des métriques finsleriennes par Patrick Foulon dans [Fo1], au cas des hamiltoniens autonomes optiques par Gonzalo Contreras et Renato Iturriaga dans [C-I] et enfin au cas des applications symplectiques de $T^*\mathbb{T}^d$ déviant la verticale par Misha Bialy et Robert S. Mackay dans [Bi-Ma]. La référence [It1] donne une démonstration très courte de l'existence de ces fibrés dans le cas riemannien et passe en revue différentes utilisations de ces fibrés. Dans toutes ces constructions, le choix d'un fibré lagrangien "horizontal" est fait. Même si plus tard il nous arrivera de fixer un tel fibré pour montrer certains résultat, nous allons voir que nous n'avons en fait pas besoin de cela pour construire les fibrés de Green : la représentation à l'aide des champs de formes quadratiques suffit.

Supposons désormais que $L : TM \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ soit un lagrangien de Tonelli et que $H : T^*M \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ soit le hamiltonien qui lui est associé. Le flot de H est noté $(\phi_t^{t'})$, et on notera : $\phi_0^t = \phi_t$.

Définissons le fibré lagrangien vertical : si $\pi^* : T^*M \to M$ désigne la projection usuelle, si $x \in T^*M$, la *verticale* en x, notée $V(x)$ est :

$$V(x) = \ker D\pi^*(x) = T_x\left(\pi^{*-1}(\pi^*(x))\right).$$

Chaque verticale $V(x)$ est alors un sous-espace lagrangien de $T_x(T^*M)$. Etant donné $t \in \mathbb{R}$ et $x \in T^*M$, on définit : $G_t(x) = D\phi_{-t}^0(\phi_{-t}(x))(V(\phi_{-t}(x))$. On rappelle :

Définition 3.6. *L'orbite de $x \in T^*M$ est* sans point conjugué *si :*

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, t \neq t' \Rightarrow D\phi_t^{t'}(\phi_t(x))(V(\phi_t(x))) \cap V(\phi_{t'}(x)) = \{0\}.$$

On a alors :

Proposition 3.7. *Soit $x \in T^*M$ sans point conjugué. On a alors :*

1. *pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, le sous espace lagrangien $G_t(x)$ de $T_x(T^*M)$ est transverse à la verticale $V(x)$; on s'intéressera alors aux hauteurs relativement à $V(x)$ (voir définition 3.1) ;*
2. *pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < t'$, on a : $Q(G_t(x), G_{t'}(x)) \ll 0$: la hauteur de $G_{t'}(x)$ au dessus de $G_t(x)$ relativement à $V(x)$ est définie négative i.e : $G_{t'}(x) \lll G_t(x)$;*
3. *pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $0 > t > t'$, on a : $Q(G_t(x), G_{t'}(x)) \gg 0$: la hauteur de $G_{t'}(x)$ au dessus de $G_t(x)$ relativement à $V(x)$ est définie positive i.e : $G_t(x) \lll G_{t'}(x)$;*
4. *pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $t < 0 < t'$, on a : $Q(G_t(x), G_{t'}(x)) \gg 0$: la hauteur de $G_{t'}(x)$ au dessus de $G_t(x)$ relativement à $V(x)$ est définie positive i.e : $G_t(x) \lll G_{t'}(x)$.*

Corollaire 3.8. *Sous les mêmes hypothèses, $G_-(x) = \lim_{t \to -\infty} G_t(x)$ et $G_+(x) = \lim_{t \to +\infty} G_t(x)$ sont deux sous-espaces lagrangiens de $T_x(T^*M)$ tels que :*

- *$Q(G_+(x), G_-(x)) \prec 0$: suivant la definition 3.5, $G_+(x)$ est au dessus de $G_-(x)$ i.e; $G_-(x) \prec G_+(x)$;*
- $\forall k \in \mathbb{Z}, D\phi_k(x)G_-(x) = G_-(\phi_k(x))$ et $D\phi_k(x)G_+(x) = G_+(\phi_k(x))$
  et si de plus le hamiltonien est indépendant du temps :
  $\forall t \in \mathbb{R}, D\phi_t(x)G_-(x) = G_-(\phi_t(x))$ et $D\phi_t(x)G_+(x) = G_+(\phi_t(x))$.

G_- et G_+ sont alors les fibrés de Green en x.

Démonstration de la proposition 3.7 et du corollaire 3.8 : Nous allons successivement démontrer la proposition et son corollaire.
Le 1. découle du fait que l'orbite est sans point conjugué ;
Toujours du fait que l'orbite est sans point conjugué, on déduit que : $\forall t \neq t', G_t(x) \cap G_{t'}(x) = \{0\}$. Cela implique que $Q(G_t(x), G_{t'}(x))$ est non dégénérée. L'application $(t, t') \to Q(G_t(x), G_{t'}(x))$ étant continue (là où elle est définie, c'est-à-dire pour t et t' non nuls), on en déduit que sur chacun des ensembles connexes suivants : $\{(t, t'); 0 < t < t'\}$, $\{(t, t'); 0 > t > t'\}$, $\{(t, t'); t < 0 < t'\}$, $Q(G_t(x), G_{t'}(x))$ est de signature constante. Il suffit donc pour prouver les points 2, 3, 4, de trouver la signature de $Q(G_t(x), G_{t'}(x))$ en un point des ensembles considérés. Pour cela, on écrit les équations de Hamilton linéarisées dans une carte au voisinage de x ; on choisit des coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$ sur $U \subset M$ que l'on complète avec les coordonnées duales de T^*M : le point de coordonnées $(x^1, \dots, x^n, p^1, \dots p^n)$ est $\sum_{k=1}^{n} p^k dx^k$; pour t petit, on note $M_t(y) = \begin{pmatrix} a^t & c^t \\ b^t & d^t \end{pmatrix}$ la matrice de $D\phi_t(y)$ dans ces coordonnées. Cette matrice est symplectique (puisque ϕ_t et les coordonnées le sont) et on déduit des équations de Hamilton linéarisées que : $c^t = tH_{pp}(y, 0) + o_{t \to 0}(t)$ et $d^t = \mathbf{1} + o_{t \to 0}(1)$ et $a^t = \mathbf{1} + o_{t \to 0}(1)$, ces équivalents étant uniformes sur un voisinage compact de x. Aussi, si $t \neq 0$ est assez petit, $D\phi_t(y)(V(y))$ est le graphe de la matrice symétrique $d^t \left(c^t\right)^{-1} \sim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(H_{pp}(y, 0)\right)^{-1}$ qui est définie positive pour $t > 0$, définie negative pour $t < 0$. Notons $Z(y)$ le sous-espace lagrangien horizontal dans ces coordonnées. On a donc $Q(Z(y), G_t(y)) \sim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(H_{pp}(y, 0)\right)^{-1}$ (en identifiant la forme quadratique et sa matrice dans la base de $T_y(T^*M)/V(y)$ obtenue en passant au quotient la base donnée pas les coordonnées dans l'espace horizontal) ce qui donne pour $t = -t'$ ou $t = 2t'$ à l'aide du deuxième point de la proposition 3.4 :

$$Q(G_t(y), G_{t'}(y)) \sim_{(t,t') \to (0,0)} \left(\frac{1}{t'} - \frac{1}{t}\right) \left(H_{pp}(y, 0)\right)^{-1}.$$

Ceci permet de déterminer les signatures cherchées.

Montrons maintenant le corollaire. Il suffit de remarquer que d'après la proposition 3.7, $(G_t(x))_{t>0}$ et $(G_t(x))_{t<0}$ sont des familles décroissantes de sous-espaces lagrangiens, et que pour tout $t < 0 < t'$, $G_{t'}(x)$ est au dessus de $G_t(x)$, donc $(G_t(x))_{t>0}$ est minorée et $(G_t(x))_{t<0}$ est majorée. Cela implique l'existence des deux limites (pour les formes quadratiques donc pour les sous-espaces lagrangiens) ainsi que l'inégalité voulue par simple passage à la limite. Le deuxième point est évident aussi par passage à la limite. □

On peut alors déduire des résultats de la section 2 un résultat de semi-continuité :

Proposition 3.9. *Soit K une partie de T^*M invariante par ϕ_1 et dont tous les éléments sont sans points conjugués. Alors sur K, l'application G_+ est semi-continue supérieurement et G_- est semi-continue inférieurement.*
Aussi, $\mathcal{G} = \{x \in K; G_-(x) = G_+(x)\}$ est un G_δ de K, et en tout point de $\mathcal{G}$, G_+ et G_- sont continues. Si de plus G est un fibré lagrangien au dessus de K tel que $G_- \prec G \prec G_+$, G est continu en tout point de $\mathcal{G}$.

3.3 Rappels sur les orbites globalement minimisantes

Nous faisons les mêmes hypothèses qu'à la section 3.2.

Définition 3.10. *Soit $x \in M$; on dit que l'orbite de x est* globalement minimisante *si pour tous $t < t'$, il existe un voisinage $V \subset C^0([t,t'], M)$ de $\gamma : [t,t'] \to M$ défini par $\gamma(s) = \pi^* \circ \phi_s(x)$ tel que pour tout $\eta : [t,t'] \to M$ dans V absolument continue et ayant les mêmes extrémités que γ, l'action lagrangienne de γ est inférieure ou égale à celle de η.*

Remarquons qu'on obtient une définition équivalente en ne considérant que les temps entiers : cette remarque est utile si on travaille avec une fonction génératrice plutôt qu'avec un lagrangien, ce que nous ne ferons pas ici.

Nous rappelons le résultat suivant, très classique :

Résultat : *si l'orbite de x est globalement minimisante, alors x est sans point conjugué.*

En dynamique lagrangienne, de nombreuses orbites globalement minimisantes interviennent : par exemple les orbites contenues dans les ensembles d'Aubry ou de Mañé (nous y reviendrons plus loin). Comme la définition d'orbite globalement minimisante que nous donnons est plutôt locale, il peut arriver qu'une telle orbite globalement minimisante n'appartienne à aucun ensemble de Mañé. C'est le cas par exemple des "orbites connectantes" construites par P. Bernard dans [Be1], orbites qui permettent de connecter différents ensembles de Mañé.

3.4 Encadrement des fibrés invariants à l'aide des fibrés de Green

Proposition 3.11. *Soit $x \in T^*M$ dont l'orbite sous (ϕ_t) est sans point conjugué et F un fibré vectoriel au dessus de $\Gamma = \{(t, \phi_t(x)); t \in \mathbb{R}\}$ tel que :*

- *pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $F(t, \phi_t(x))$ est un sous-espace lagrangien de $T_{\phi_t(x)}(T^*M)$ transverse à la verticale ;*
- *pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $F(t, \phi_t(x)) = D\phi_t(x)(F(0,x))$*

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, G_-(\phi_n(x)) \prec F(n, \phi_n(x)) \prec G_+(\phi_n(x)).$$

Démonstration de la proposition 3.11 : Nous montrons juste que $F(n,\phi_n(x)) \prec G_+(\phi_n(x))$, l'autre inégalité étant similaire. Pour alléger, nous notons : $F(t) = F(t,\phi_t(x))$. Vu le rôle symétrique joué par tous les $\phi_n(x)$, on va même se contenter de montrer que : $F(0) \prec G_+(x)$.

Par hypothèse, pour chaque $(t,y) \in \Gamma$, $F(t)$ est un sous-espace lagrangien de $T_y(T^*M)$ transverse à la verticale $V(y)$. Aussi, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $D\phi_t^{t+\tau}(y)(F(t)) = F(t+\tau)$ est transverse à $D\phi_t^{t+\tau}(y)V(y)$. On en déduit que chaque $t \in \mathbb{R}$, $G_t(x)$ est transverse à $F(0)$.

Plaçons nous comme dans la démonstration de la proposition 3.7 dans une carte (T^*U_i, φ_i^*) en x. Comme $t \to G_t(x)$ est continue et vaut la verticale en $t=0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour chaque $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $G_t(x)$ ne rencontre pas l'horizontale en x (cette horizontale est définie dans les coordonnées utilisées).

On a vu lors de la démonstration de la proposition 3.7 que pour $t > 0$ assez petit, $G_t(x)$ est le graphe (dans la carte (T^*U_i, φ_i^*)) de la matrice symétrique définie positive $S_t(x) \sim \frac{1}{t}\left(H_{pp}(y,0)\right)^{-1}$. Comme pour $t \in]0,\varepsilon]$, $G_t(x)$ ne rencontre pas l'horizontale, la signature de $S_t(x)$ ne peut changer et la matrice est définie positive. Comme $t \to G_t(x)$ est continue et vaut $V(x)$ en $t=0$, on en déduit que pour tout $C > 0$, il existe η tel que pour chaque $t \in]0,\eta]$, $C\mathbf{1} \ll S_t(x)$: pour des temps positifs assez petits, les images de la verticale sont au dessus d'un plan lagrangien fixé. En particulier, pour $t \in]0,\eta]$, $G_t(x)$ est strictement au dessus de $F(0)$. On a déjà montré que pour chaque temps, $G_t(x)$ est transverse à $F(0)$, donc la hauteur $Q_{V(x)}(F(0), G_t(x))$ ne dégènère pas pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et reste donc définie positive, i.e. $F(0) \ll G_t(x)$. On conclut en passant à la limite. $\square$

3.5 Un critère dynamique d'appartenance aux fibrés de Green

Le critère que nous allons donner est démontré dans le cas autonome mais d'une façon très calculatoire dans [C-I] et dans le cas des applications symplectiques de l'anneau déviant la verticale dans [Arn1]. C'est à la suite d'une discussion avec Sylvain Crovisier concernant l'interprétation géométrique de ce critère en dimension 1 que m'est venu l'idée la démonstration qui va suivre.

Proposition 3.12. *Soit $x \in T^*M$ un point dont l'orbite est relativement compacte et sans point conjugué et $v \in T_x(T^*M)$. Alors :*

- *si $v \notin G_-(x)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|D(\pi^* \circ \phi_n)(x)v\| = +\infty$;*
- *si $v \notin G_+(x)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|D(\pi^* \circ \phi_{-n})(x)v\| = +\infty$.*

Démonstration de la proposition 3.12 : Nous allons juste montrer la première affirmation, l'autre étant similaire.
L'orbite de x étant relativement compacte, il en est de même de sa projection sur M, contenue dans un compact que l'on peut recouvrir par un nombre fini de carte $(U_i, \varphi_i)_{0\le i\le N}$. On note alors : $\forall x \in U_i, \varphi_i(x) = (x_i^1, \dots, x_i^n)$; pour obtenir des coordonnées sur T^*U_i, on complète avec les coordonnées duales de T^*M : le point de coordonnées $(x_i^1, \dots, x_i^n, p_i^1, \dots p_i^n)$ est $\sum_{k=1}^n p_i^k dx_i^k$; on note alors (T^*U_i, φ_i^*) cette carte duale. Etant donné $t \in \mathbb{R}$, il existe alors $i = i(t)$ tel que $\pi^* \circ \phi_t(x) \in U_i$. On note alors M_t la matrice de $D\phi_t(x)$ exprimée dans les coordonnées symplectiques $(T^*U_{i(0)}, \varphi_{i(0)}^*)$ et $(T^*U_{i(t)}, \varphi_{i(t)}^*)$. Cette matrice est de la forme : $M_t = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix}$.

Comme de plus G_- est lagrangien et transverse à la verticale, il existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ une unique matrice symétrique $S^-(t)$ telle que $G_-(\phi_t(x))$ est le graphe de $S^-(t)$. De même, on a vu que chaque $D\phi_1(\phi_{t-1}(x))V(\phi_{t-1}(x))$ et chaque $D\phi_{-1}(\phi_{t+1}(x))V(\phi_{t+1}(x))$ est un sous-espace lagrangien transverse à la verticale, et est donc le graphe d'une matrice symétrique $S_1^+(t)$, $S_1^-(t)$. On a supposé que l'orbite de x est relativement compacte, d'adhérence compacte notée Γ. Comme l'ensemble des points dont l'orbite est sans point conjugué est un fermé, on peut en fait définir tous ces fibrés sur Γ tout entier. Or, les deux fibrés $y \in \Gamma \to D\phi_1(y)V(y)$ et $y \in \Gamma \to D\phi_{-1}(y)V(y)$ dépendent continûment de y et sont transverses à la verticale ; comme on a un nombre fini de cartes, on en déduit que leurs matrices lues en cartes forment une partie bornée et comme : $S_1^- \ll S^- \ll S_1^+$, les $\{S^-(t); t \in \mathbb{R}\}$ forment une partie relativement compacte. Considérons les matrices symplectiques : $P_t = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ S^-(t) & \mathbf{1} \end{pmatrix}$; elles sont donc uniformément bornées et $P_t^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -S^-(t) & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ est aussi uniformément bornée. On utilise alors ces matrices pour faire un changement de base symplectique dans la fibre de $T(T^*M)$. Plus précisément, si les coordonnées initiales dans $T_{\Phi_t(x)}(T^*M)$ étaient (ξ_i, ρ_i), les nouvelles coordonnées sont $P_t^{-1}\begin{pmatrix} \xi \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \rho - S^-(t)\xi \end{pmatrix}$, i.e. on choisit des coordonnées dans lesquelles le fibré de Green G_- devient l'"horizontale". Comme la matrice P_t et son inverse sont uniformément bornées, les convergences des fibrés se voient aussi bien dans ces nouvelles coordonnées que dans les anciennes. Désormais, on travaillera donc dans ces bases et on gardera la même notation M_t. Comme G_- est invariant, on a alors : $M_t = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ 0 & d_t \end{pmatrix}$.

Pour $n \geq 1$, notons S_n^- la matrice symétrique dont $G_{-n}(x)$ est le graphe et S_n^+ la matrice symétrique dont $G_n(\phi_n(x))$ est le graphe. Alors : $d_n = S_n^+ b_n$. De plus, comme M_n est symplectique, on a : $M_n^{-1} = \begin{pmatrix} {}^t b_n S_n^+ & -{}^t b_n \\ 0 & {}^t a_n \end{pmatrix}$

donc : $a_n = -b_n S_n^-$. d'où finalement : $M_n = \begin{pmatrix} -b_n S_n^- & b_n \\ 0 & S_n^+ b_n \end{pmatrix}$

Comme le fibré de Green G_- correspond dans ces coordonnées à l'horizontale, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n^- = 0$. De plus, avec les mêmes notations que précédemment, mais exprimées dans les nouvelles coordonnées : $S_1^-(n) \ll S_n^+ \prec S_1^+(n)$: le fibré G_n est encadré par des images de la verticale dont on a vu qu'elles sont uniformément bornées. A cause de l'inégalité entre les deux fibrés de Green, comme l'un deux est l'horizontale, on a même : $0 \ll S_n^+ \prec S_1^+(n)$. Ainsi, $(S_n^+)_{n \geq 1}$ est une famille uniformément bornée de matrices symétriques définie positives. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que : $\forall v \in \mathbb{R}^{2d}, 0 \leq {}^t v S_n^+ v \leq C\|v\|^2$. Or, comme M_n et symplectique, on a : $S_n^-({}^t b_n) S_n^+ b_n = -1$ donc $(S_n^-)^{-1} = -{}^t b_n S_n^+ b_n$. On en déduit :

$$\forall v \in \mathbb{R}^{2d}, -{}^t v (S_n^-)^{-1} v = {}^t v {}^t b_n S_n^+ b_n v \leq C\|b_n v\|^2.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n^- = 0$, on en déduit que pour tout $v \neq 0$, la suite $(\|b_n v\|)_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$ et même que pour tout $A \geq 0$, il existe un rang à partir duquel, pour tout v : $\|b_n v\| \geq A\|v\|$ (*).

En d'autres termes, on a montré que si p_- : $T(T^*M) \to T(T^*M)$ désigne la projection sur G_- parallèlement à la verticale, alors pour tout vecteur $v \in V(x) \backslash \{0\}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \|p_- \circ D\phi_n(x) v\| = +\infty$. Soit maintenant $v \in T_x(T^*M) \backslash G_-(x)$ de coordonnées (v_1, v_2) ; alors : $p_- \circ D\phi_n(x) v$ a pour coordonnées $b_n(v_2 - S_n^- v_1)$. Or, la suite $(v_2 - S_n^- v_1)_{n \geq 1}$ converge vers $v_2 \neq 0$ puisque $v \notin G_-(x)$

et donc par (*) la suite $(\|b_n(v_2 - S_n^- v_1)\|)_{n\geq 1}$ converge vers $+\infty$. On a finalement montré que pour tout $v \in T_xM \backslash G_-(x)$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \|p_- \circ D\phi_n(x)v\| = +\infty$.

On remarque que si maintenant on revient dans les coordonnées initiales (l'"horizontale" n'est plus G_-), on peut exprimer : $p_-(v_1, v_2) = (v_1, S_-v_1)$ et $D\pi^*(v_1, v_2) = v_1$, donc si $\lim_{n\to+\infty} \|p_- \circ D\phi_n(x)v\| = +\infty$, comme S_- est uniformément bornée, on a aussi : $\lim_{n\to+\infty} \|D\pi^* \circ D\phi_n(x)v\| = +\infty$. □

Exemples Nous expliquons quelles conséquences simples on peut tirer du critère dynamique, dans le cas autonome ou/et dans le cas partiellement hyperbolique. Dans le cas autonome, toutes ces conséquences étaient déjà données dans [C-I], nous en rappelons l'argument pour être complets :

1. Dans le cas d'une partie invariante $K \subset T^*M$ relativement compacte et formée d'orbites sans point conjugué telle que l'application tangente au temps 1 du flot hamiltonien restreinte à $T_K(T^*M)$ est hyperbolique, $G_-(x)$ est le tangent au feuilletage stable et $G_+(x)$ le tangent au feuilletage instable : en effet, les orbites des vecteurs des fibrés stables sont bornées en temps positif, alors que les orbites des vecteurs des fibrés instables sont bornées en temps négatifs, et on peut donc utiliser le critère dynamique pour conclure.
2. dans le cas d'un hamiltonien indépendant du temps, si on suppose qu'une orbite non critique et sans point conjugué est relativement compacte, le champ de vecteurs hamiltonien a une orbite bornée sous l'application tangente au flot. On a donc dans ce cas :
$$\mathbb{R}X_H(x) \subset G_-(x) \cap G_+(x).$$
Comme $G_-(x)$ et $G_+(x)$ sont lagrangiens, on en déduit qu'ils sont dans l'orthogonal pour la forme symplectique, au champ de vecteurs hamiltonien, c-à-d dans le fibré tangent à l'hypersurface d'énergie.
3. supposons maintenant que K soit une partie relativement compacte, invariante et sans point conjugué telle que la dynamique sur T_KM soit partiellement hyperbolique (voir par exemple [Bo-Vi] pour une définition) ; on note $E^s \oplus E^c \oplus E^u$ la décomposition correspondante, avec E^u fibré instable, E^s fibré stable et E^c fibré centre. Alors :
$$\forall x \in K, E^s(x) \subset G_-(x) \subset E^s(x) \oplus E^c(x) \quad \text{est} \quad E^s(x) \subset G_-(x) \subset E^s(x) \oplus E^c(x).$$
Pour la première inclusion, la démonstration est exactement la même que dans le cas hyperbolique. Comme le flot est symplectique, le sous-espace E^s est alors isotrope et son orthogonal pour la forme symplectique est $(E^s)^\perp = E^c \oplus E^s$ (voir [Bo-Vi] pour ces propriétés des fibrés symplectiques). Comme G_- est lagrangien et contient E^s, on en déduit : $G_- = G_-^\perp \subset (E^s)^\perp = E^c \oplus E^s$, soit l'inclusion voulue.

3.6 Les fibrés de Green réduits dans le cas autonome

Dans le cas où le hamiltonien est indépendant du temps, on sait que les hypersurfaces d'énergie sont invariantes. Fixons donc une telle hypersurface $\mathcal{E}$ et intéressons-nous à une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ qui est invariante par le flot hamiltonien et qui ne contient pas de point x en lequel le champ hamiltonien est vertical : $\forall x \in \mathcal{F}, X_H(x) \notin V(x)$.
En chaque $x \in \mathcal{F}$, la 2-forme $\omega(x)_{|T_x\mathcal{E}}$ est alors dégénérée de noyau $\mathbb{R}X_H(x)$ si X_H désigne le

champ de vecteurs hamiltonien. On définit alors au dessus de $\mathcal{F}$ le fibré symplectique F qui se déduit de $T_{\mathcal{F}}\mathcal{E}$ en effectuant une réduction symplectique, c-à-d qu'on on passe au quotient par $\ker \omega_{|T_{\mathcal{F}}\mathcal{E}}$:

$$\forall x \in \mathcal{F}, F(x) = T_x\mathcal{E}/\mathbb{R}X_H(x) \quad \text{et} \quad \forall u, v \in T_x\mathcal{E}, \Omega(p(u), p(v)) = \omega(u, v)$$

où $p\ : T_{\mathcal{F}}\mathcal{E} \to F$ désigne la projection canonique.

Dans ce fibré symplectique F, on peut définir une verticale : $v(x) = p(V(x) \cap T_x\mathcal{E})$ qui définit une sous-espace lagrangien de $F(x)$ (car on a supposé que $X_H(x)$ n'est pas vertical). On peut dans ce nouveau fibré symplectique utiliser les notions définies en section 3.1 et comparer deux-à-deux les sous-espaces lagrangiens de $F(x)$, parler de leur hauteur relativement à $v(x)$. Alors, si ℓ_1, ℓ_2 sont deux sous-espaces lagrangiens de $F(x)$ qui sont transverses à $v(x)$, $L_1 = p^{-1}(\ell_1)$ et $L_2 = p^{-1}(\ell_2)$ sont deux sous-espaces lagrangiens de $T_x\mathcal{E}$ (donc $T_x(T^*M)$) qui sont transverses à $V(x)$. La hauteur de ℓ_2 au dessus de ℓ_1 a même signature que la hauteur de L_2 au dessus de L_1 ; simplement, la nullité (dimension du noyau) augmente d'une unité quand on passe de $F(x)$ à $T_x(T^*M)$.

Pour faire la comparaison dans l'autre sens, c'est-à-dire partir de deux sous-espaces lagrangiens L_1 et L_2 de $T_x(T^*M)$ qui sont transverses à $V(x)$ et comparer $\ell_1 = p(L_1 \cap T_x\mathcal{E})$ et $\ell_2 = p(L_2 \cap T_x\mathcal{E})$, il faut faire attention à plusieurs choses ; on s'intéresse au cas où ni L_1, ni L_2 ne sont inclus dans $T_x\mathcal{E}$; on doit alors vérifier :

1. pour que les $L_i \cap T_x\mathcal{E}$ se projettent par p en des sous-espaces lagrangiens de $F(x)$, il faut s'assurer que $X_H(x) \notin L_i$;
2. si on suppose que L_1 et L_2 sont transverses, il n'est pas sûr que $\ell_1 = p(L_1 \cap T_x\mathcal{E})$ et $\ell_2 = p(L_2 \cap T_x\mathcal{E})$ soient transverses ; ceci n'est vrai que si : $L_2 \cap T_x\mathcal{E} \cap (L_1 \oplus \mathbb{R}X_H(x)) = \{0\}$.

Au dessus de $\mathcal{F}$, le fibré en droite $\mathbb{R}X_H$ est invariant par $(D\phi_t)$. On peut donc aussi passer au quotient $D\phi_t$, qui définit un cocycle symplectique (M_t) sur le fibré F.

Supposons maintenant que l'orbite de $x \in \mathcal{F}$ soit sans point conjugué. On avait défini en section 3.2 les $G_t(x)$. Comme on a supposé que sur $\mathcal{F}$, et donc le long de l'orbite de x, le champ de vecteurs n'est pas sur la verticale, on a : $\forall t \in \mathbb{R}, X_H(x) \notin G_t(x)$. On en déduit que chaque $g_t(x) = p(G_t(x) \cap T_x\mathcal{E})$ est un sous-espace lagrangien de $F(x)$. De plus, on déduit de la définition de M_t et G_t que : $g_t(x) = M_t(\phi_{-t}x)v(\phi_{-t}x)$.

Pour essayer de faire dans $F(x)$ une démonstration analogue à celle faite dans $T_x(T^*M)$ en section 3.5, on a besoin de vérifier que les $g_t(x)$ sont transverses, ce qui revient à montrer que pour chaque $t > 0$, $g_t(x)$ est transverse à $v(x)$. Montrons donc :

Lemme 3.13. *Soit $x \in \mathcal{F}$ sans point conjugué ; alors, pour chaque $t > 0$, $g_t(x)$ est transverse à $v(x)$.*

Démonstration du lemme 3.13 : Introduisons une notation : $\tilde{g}_t(x) = (G_t(x) \cap T_x\mathcal{E}) \oplus \mathbb{R}X_H(x)$ et $\mathcal{V}(x) = V(x) \cap T_x\mathcal{E}$. Montrer que $g_t(x)$ est transverse à $v(x)$ revient à montrer que $\tilde{g}_t(x) \cap \mathcal{V}(x) = \{0\}$.

Soit donc $v \in \mathcal{V}(\phi_{-t}x) \backslash \{0\}$ tel que $D\phi_t(\phi_{-t}x).v = w + \lambda X_H(x)$ avec $w \in \mathcal{V}(x)$. Comme $v \neq 0$, on a : $\lambda \neq 0$. Aussi, quitte à diviser v par λ, on peut supposer que $\lambda = 1$.

Nous pouvons nous placer dans les coordonnées introduites dans la démonstration de la proposition 3.12. L'horizontale est alors le fibré de Green G_- et la matrice de $D\phi_t(\phi_{-t}x)$ est : $N_t = \begin{pmatrix} -b_t S_t^- & b_t \\ 0 & S_t^+ b_t \end{pmatrix}$

avec les mêmes notations que dans la démonstration de la proposition 3.12. Faisant un abus de notation, nous identifierons les vecteurs avec leurs coordonnées. On a donc : $v = (0, v_0)$ et $X_H(x) = (h_1, 0)$ puisque $X_H(x) \in G_-(x)$; on a de plus : $h_1 \neq 0$. Du fait que $D\phi_t(\phi_{-t}x).v = w + X_H(x)$ avec $w = (0, w_1) \in V(x)$, on déduit alors aisément que $b_t v_0 = h_1$ et que donc $D\phi_t(\phi_{-t}x)v = (h_1, S_t^+ h_1)$. Donc :

$$\omega(D\phi_t(\phi_{-t}x)v, X_H(x)) = \omega((h_1, S_t^+ h_1), (h_1, 0)) = -{}^t h_1 S_t^+ h_1 \neq 0.$$

Ceci contredit le fait que $v \in \mathcal{V}(\phi_{-t}x) \subset T_{\phi_{-t}x}\mathcal{E} = X_H(\phi_{-t}x)^{\perp\omega}$.

□

De ce lemme on déduit que non seulement les $g_t(x)$ sont transverses à la verticale $v(x)$, mais aussi qu'ils sont deux à deux transverses. On peut donc parler de la hauteur de $g_t(x)$ au dessus se $g_{t'}(x)$ (relativement à $v(x)$), et on sait que ces hauteurs sont non dégénérées. De façon analogue à la proposition 3.7, on peut même préciser :

Proposition 3.14. *Soit $x \in \mathcal{F}$ sans point conjugué. On a alors :*

1. *pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, le sous espace lagrangien $g_t(x)$ de $F(x)$ est transverse à la verticale $v(x)$; on s'intéressera alors aux hauteurs relativement à $v(x)$ (voir définition 3.1) ;*
2. *pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < t'$, on a : $Q(g_t(x), g_{t'}(x)) \ll 0$: la hauteur de $g_{t'}(x)$ au dessus de $g_t(x)$ relativement à $v(x)$ est définie négative i.e : $g_{t'}(x) \ll g_t(x)$;*
3. *pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $0 > t > t'$, on a : $Q(g_t(x), g_{t'}(x)) \gg 0$: la hauteur de $g_{t'}(x)$ au dessus de $g_t(x)$ relativement à $v(x)$ est définie positive i.e : $g_t(x) \ll g_{t'}(x)$;*
4. *pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $t < 0 < t'$, on a : $Q(g_t(x), g_{t'}(x)) \gg 0$: la hauteur de $g_{t'}(x)$ au dessus de $g_t(x)$ relativement à $v(x)$ est définie positive i.e : $g_t(x) \ll g_{t'}(x)$.*

Démonstration de la proposition 3.14 : Le premier point découle du lemme 3.13. Comme les trois autres points se démontrent de façon similaire, nous allons seulement montrer l'un d'entre eux.

Supposons donc par exemple que $0 < t < t'$. Comme dans la démonstration de la proposition 3.7, les g_t étant transverses deux à deux, il suffit de montrer le résultat pour un choix de t et t', que nous allons prendre très petits. Cela nous permet de raisonner dans une seule carte en $x \in \mathcal{F}$.

Comme le champ de vecteurs sur $\mathcal{F}$ n'est pas vertical, on peut construire, au voisinage $\mathcal{U} \subset T^*U$ de x, un hamiltonien K qui vaut 1 sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{E}$ et qui, dans les coordonnées sur $\mathcal{U}$ déjà utilisées dans la démonstration du lemme, est homogène de degré 2 dans la fibre, ce qui signifie : on choisit un morceau de graphe lagrangien $\mathcal{L}$ au dessus de U qui est proche de x et inclus dans $\{y; H(y) < H(x)\}$ puis on considère pour K l'unique fonction définie sur $\mathcal{U}$ telle que :

- $K_{|\mathcal{E}\cap\mathcal{U}} = 1$;
- $\forall y = (y_1, y_2) \in \mathcal{L} \cap \mathcal{U}, \forall v \in T_{y_1}M, w = (y_1, y_2 + v) \in \mathcal{U}$ et $z = (y_1, y_2 + \mu v) \in \mathcal{U} \Rightarrow K(z) = \mu^2 K(w)$.

Le hamiltonien K est alors aussi de classe C^2 et convexe dans la fibre (voir par exemple [Arn2] ou [Arn3]). De plus, comme $E = \{K = 1\} = \{H = H(x)\} \cap \mathcal{U}$, le flot hamiltonien de K restreint à E se déduit de celui de H à l'aide d'une reparamétrisation. Comparer $g_t(x)$ et $g_{t'}(x)$ pour $0 < t < t'$ petits revient alors au même que l'on parle du flot hamiltonien de K ou de H (en effet, on peut avoir les $G_t \cap E$ qui sont différents pour H et K, par contre les $g_t(x)$ coïncident).

On peut donc supposer que H vérifie les même hypothèses que K. Mais alors, de l'homogénéité dans la fibre, on déduit qu'il existe en chaque $y \in E$ une droite verticale $D(y) \subset V(y)$ telle qu'au dessus de E, le fibré en plans symplectiques $P(y) = D(y) \oplus \mathbb{R}X_H(y)$ est continu et invariant par le flot symplectique (local) de H (voir par exemple [Arn2]). Le fibré orthogonal à P pour la forme symplectique est alors un fibré continu en sous-espaces symplectiques G de dimension $2(d-1)$ qui sont inclus dans $T_y\mathcal{E}$ et transverses au champ de vecteurs. Or, si $y \in E$, $\mathcal{V}(y) = V(y) \cap T_y\mathcal{E}$ est à la fois orthogonal à $D(y)$ (car $V(y)$ est lagrangien) et à $\mathbb{R}X_H(y)$ (comme tout vecteur de $T_x\mathcal{E}$), donc inclus dans $G(y)$. Donc pour $t \neq 0$ petit, les $G_t(x) \cap T_x\mathcal{E} = D\phi_t(\phi_{-t}x)\mathcal{V}(\phi_{-t}x)$ sont des sous-espaces lagrangiens de $G(x)$ transverses à $\mathcal{V}(x)$.
Nous avons maintenant les outils pour estimer le signe de $Q(g_t(x), g_{t'}(x))$. Supposons que $w \in G_t(x) \cap T_x\mathcal{E}$ et $w' \in G_{t'}(x) \cap T_x\mathcal{E}$ soient tels que $p(w) = p(w')$. On cherche alors le signe de $\omega(w, w')$. Dire que $p(w) = p(w')$ s'écrit : $w - w' \in \mathbb{R}X_H(x) + \mathcal{V}(x)$; mais comme de plus $w, w' \in G(x)$, $\mathcal{V}(x) \subset G(x)$ et $X_H(x) \notin G(x)$, on a en fait : $w - w' \in \mathcal{V}(x) \subset V(x)$. On déduit alors de la proposition 3.7 (qui dit en particulier que $Q_{V(x)}(G_t(x), G_{t'}(x)) \ll 0$) que $\omega(w, w') \leq 0$, soit le résultat cherché. $\square$

Remarque 3.15. *La construction du hamiltonien K que nous venons de faire est un analogue local d'une construction globale bien connue en mécanique classique : celle de la métrique de Jacobi. Son avantage est l'existence, pour le nouveau flot, d'un fibré symplectique invariant G tel que la restriction du nouveau flot linéaire à G est conjuguée au flot linéaire initial restreint à l'hypersurface et quotienté par le champ de vecteurs.*

De façon analogue à ce que nous avions fait en sections 3.2 et 3.4 (les démonstrations sont similaires), on obtient :

Proposition 3.16. *Soit $x \in \mathcal{F}$ sans point conjugué. Alors :*

1. $g_-(x) = \lim_{t\to-\infty} g_t(x)$ *et* $g_+(x) = \lim_{t\to+\infty} g_t(x)$ *sont deux sous-espaces lagrangiens de $F(x)$ tels que :*
   - $Q(g_+(x), g_-(x)) \prec 0$ *: suivant la definition 3.5, $g_+(x)$ est au dessus de $g_-(x)$ i.e ; $g_-(x) \prec g_+(x)$;*
   - $\forall t \in \mathbb{R}, M_t(x)g_-(x) = g_-(\phi_t(x))$ et $M_t(x)g_+(x) = g_+(\phi_t(x))$.

   g_- et g_+ sont alors les fibrés de Green reduits en *x.*
2. *Soit K une partie de $\mathcal{F}$ invariante par (ϕ_t) et dont tous les éléments sont sans points conjugués. Alors sur K, l'application g_+ est semi-continue supérieurement et g_- est semi-continue inférieurement.*
   Aussi, $\mathcal{G} = \{x \in K; g_-(x) = g_+(x)\}$ est un G_δ de K, et en tout point de $\mathcal{G}$, g_+ et g_- sont continues. Si de plus g est un sous-fibré lagrangien de F au dessus de K tel que $g_- \prec g \prec g_+$, g est continu en tout point de $\mathcal{G}$.
3. *Soit g un fibré vectoriel au dessus de $\Gamma = \{\phi_t(x); t \in \mathbb{R}\}$ tel que :*
   - *pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $g(\phi_t(x))$ est un sous-espace lagrangien de $F(\phi_t(x))$ transverse à la verticale $v(\phi_t(x))$;*
   - *pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $g(\phi_t(x)) = M_t(x)(g(x))$*

   Alors :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, g_-(\phi_t(x)) \prec g(\phi_t(x)) \prec g_+(\phi_t(x)).$$

On a même une version du critère dynamique dans ce cas :

Proposition 3.17. *Soit $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien de Tonelli. Soit $\mathcal{E}$ une hypersurface de niveau de H et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{E}$ invariante par le flot hamiltonien, sans point conjugué, compacte et sur laquelle l'angle du champ de vecteurs hamiltonien avec la verticale est uniformément minoré par une constante strictement positive quand il est défini (aux point où le champ de vecteurs ne s'annule pas). On note $p_x : T\mathcal{E} \to T\mathcal{E}/\mathbb{R}X_H(x)$ la projection canonique. Soit $x \in \mathcal{F}$ et $v \in T_x(\mathcal{E})$. Alors :*

- *si $v \notin G_-(x)$, alors $\lim_{t\to+\infty} \|p_{\phi_t(x)}(D\phi_t(x)v)\| = +\infty$;*
- *si $v \notin G_+(x)$, alors $\lim_{t\to+\infty} \|p_{\phi_{-t}(x)}(D\phi_{-t}(x)v)\| = +\infty$.*

On a ainsi un analogue de la proposition 3.12 en passant au quotient par le champ de vecteurs dans la surface d'énergie.
Démonstration de la proposition 3.17 : On va s'inspirer de la démonstration de la proposition 3.12 : on a le même ordre sur les g_t que celui qu'on avait sur le G_t ; la seule difficulté est l'argument qui permet de dire que les matrices de changement de bases symplectiques sont uniformément bornées : si on est exactement en un zéro du champ de vecteurs, on n'a pas de problème car en ce point notre énoncé est exactement le même que celui de la proposition 3.12 ; le problème est quand on raisonne sur l'ensemble $\mathcal{F}_0 = \{x \in \mathcal{F}; X_H(x) \neq 0\}$, qui n'est pas forcément compact. Pour résoudre de problème, on est amené à *éclater les singularités*.
On commence par définir :

$$\mathcal{P} = \{(x, \Delta); x \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \Delta \quad \text{droite} \quad \text{vectorielle} \quad \text{de} \quad T_x\mathcal{E}\}.$$

Comme $\mathcal{F}$ est compacte, $\mathcal{P}$ est aussi compacte. De plus, $\mathcal{P}$ est invariante par le flot $(D\phi_t)$. Ensuite, on introduit :

$$\mathcal{R} = \{(x, \mathbb{R}.X_H(x)); x \in \mathcal{F}_0\} \subset \mathcal{P}$$

qui est aussi invariante par le flot $(D\phi_t)$. Alors, $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{R}}$ qui est l'adhérence de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}$ est une partie compacte de $\mathcal{P}$ invariante par $(D\phi_t)$. Contrairement à $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ n'est pas une section de $\mathcal{P}$ au dessus d'une partie de $\mathcal{F}$, puisqu'au dessus d'un zéro de X_H il peut exister plusieurs éléments.

On définit alors le fibré vectoriel $\mathcal{T}$ au dessus de $\mathcal{C}$ par : $(x, \Delta, v \in \Delta^{\perp\omega}) \in \mathcal{T} \to (x, \Delta)$. La fibre de $\mathcal{T}$ au dessus de $(x, \Delta) \in \mathcal{C}$ est donc $\Delta^{\perp\omega}$; en un point régulier (tel que $X_H(x) \neq 0$), c'est $T_x\mathcal{E}$. Comme $\Delta \subset \Delta^{\perp\omega}$ et même $\Delta = \ker \omega_{|\Delta^{\perp\omega}}$, on peut passer $\mathcal{T}$ au quotient par son sous-fibré $\mathcal{T}_0$ définit par : $(x, \Delta, v) \in \mathcal{T}_0 \Leftrightarrow v \in \Delta$, et on obtient ainsi un fibré vectoriel $\mathcal{T}^*$ qui est symplectique. Au dessus des (x, D) avec x régulier, cela revient, comme on l'a déjà expliqué précédemment, à quotienter $T_x\mathcal{E}$ par $\mathbb{R}X_H(x)$. On notera : $p : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^*$ ce passage au quotient.

On peut alors définir sur $\mathcal{T}$ le flot "éclaté" de $(D\phi_t)$ par :

$$F_t : (x, \Delta, v) \in \mathcal{T} \to (\phi_t x, D\phi_t(x)\Delta, D\phi_t(x)v).$$

le sous-fibré $\mathcal{T}_0$ de $\mathcal{T}$ est alors invariant par F_t, et on peut donc passer (F_t) au quotient de manière à définir le cocycle symplectique $F_t^* : \mathcal{T}^* \to \mathcal{T}^*$ au dessus de $\mathcal{C}$.
A cause de l'hypothèse faite sur $\mathcal{F}$ (l'angle du champ de vecteurs hamiltonien avec la verticale est uniformément minoré par une constante strictement positive quand il est défini), pour chaque $(x, \Delta) \in \mathcal{C}$, on a : $\Delta \cap V(x) = \{0\}$. On peut alors reprendre le raisonnement que nous avions fait au début de cette sous-section au voisinage des points réguliers en lesquels le champs hamiltonien

n'est pas vertical, mais cette fois au dessus de tous les points de $\mathcal{C}$: si $(x,\Delta)\in\mathcal{C}$, $v(x,\Delta)=p(V(x)\cap\Delta^{\perp\omega})$ est un sous-espace lagrangien de la fibre $\mathcal{T}^*_{(x,\Delta)}$ de $\mathcal{T}^*$ au dessus de (x,Δ). On définit alors $g_t(x,\Delta)$ par : $\{(\phi_t x, D\phi_t(x)\Delta)\}\times g_t(\phi_t x, D\phi_t(x)\Delta)=F_t^*(\{(x,\Delta)\}\times v(x,\Delta))$; les $g_t(x,\Delta)$ sont alors disposés comme l'étaient les $G_t(x)$ (on l'a montré en proposition 3.14 pour x point régulier, on l'obtient aux autres points par passage à la limite) , ce qui permet de définir par passage à la limite (de manière analogue à G_- et G_+) les sous-espaces lagrangiens $g_-(x,\Delta)$ et $g_+(x,\Delta)$ de $\mathcal{T}^*(x,\Delta)$. Cette fois, comme on travaille sur un compact, on peut finir la démonstration comme celle de la proposition 3.12, et cela donne la conclusion voulue en regardant juste ce qui se passe aux points réguliers. □

4 Liens entre les fibrés de Green et les graphes C^0 lagangiens invariants

On rappelle qu'une sous-variété de classe C^1 de T^*M est dite *lagrangienne* si elle a même dimension que M et si la restriction de la forme symplectique à son fibré tangent est identiquement nulle. On sait alors qu'une telle sous-variété est le graphe d'une fonction de classe C^1 si et seulement si il existe une 1-forme fermée (de classe C^1) dont elle est le graphe (voir par exemple [We1]).
Qu'appelle-t-on alors un graphe C^0-lagrangien ? De façon naturelle et suivant [He2] (I.8.13) :

Définition 4.1. *On appelle graphe C^0-lagrangien dans T^*M le graphe d'une 1-forme λ (continue) qui est fermée au sens des distributions.*

Remarque 4.2. *De manière équivalente, un graphe C^0 lagrangien est le graphe d'une section $s\ :M\to T^*M$ du cotangent telle qu'il existe une 1-forme fermée c de classe C^∞ de M et une fonction $u\ :M\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $s=c+du$.*

Le premier théorème de Birkhoff (voir par exemple [He3]) affirme que si $M=\mathbb{T}^1$ et si $L\ :\mathbb{T}\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ est un Lagrangien de Tonelli, tout graphe invariant *continu* par le temps 1 du flot d'Euler-Lagrange de L est en fait le graphe d'une application *lipschitzienne*. Signalons aussi qu'il existe en dimension 1 des résultats qui montrent qu'en fait ces graphes invariants sont plus réguliers que simplement lipschitz (voir [Arn1]).
En dimension supérieure, la même question se pose pour les graphes C^0-lagrangiens de T^*M. Nous renvoyons le lecteur à l'excellent texte de Michel Herman [He2] dans lequel il est expliqué à l'aide de contre-exemples pourquoi il faut imposer aux graphes considérés d'être lagrangiens, pourquoi il faut une "torsion" définie. . . pour espérer des résultats analogue et dans lequel est donnée la démonstration d'un résultat analogue pour les difféomorphismes qui admettent une fonction génératrice globale.

En dimension supérieure, le premier théorème de Birkhoff est aussi vrai. Expliquons plus en détail d'où cela vient. Tout d'abord, remarquons que quitte à utiliser un difféomorphisme symplectique de la forme $(x,p)\to(x,p+c(x))$ et changer le hamiltonien H en $H_1(x,p,t)=H(x,p+c(x),t)$, on peut supposer qu'on s'intéresse à des graphes *exacts symplectiques* (i.e. $\lambda=du_0$ est exacte).
Or, si le graphe de du_0 (avec $u_0\in C^1(M,\mathbb{R})$) est invariant par le temps 1 du flot hamiltonien (ϕ_t) du hamiltonien de Tonelli H, il existe $u\in C^1(M\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui est une solution de l'équation

de Hamilton-Jacobi :

$$(H-J) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + H(d_x u(x,t),t) = 0$$

et vérifie :

- $\forall x \in M, u(x,0) = u_0(x)$;
- $\forall x \in M, d_x u(x,1) = d_x u(x,0)$.

Ce résultat est classique. Par souci de complétude, nous en donnons une démonstration dans l'appendice, démonstration qui nécessite d'être familier avec la théorie K.A.M. faible.
Dans [Fa1], A. Fathi montre que toute solution de classe C^1 de l'équation de Hamilton-Jacobi est en fait de classe $C^{1,1}$. Ainsi, il généralise à toute dimension le premier théorème de Birkhoff : tout graphe C^0 lagrangien invariant par le temps 1 d'un flot hamiltonien de Tonelli est donc le graphe d'une application lipschitzienne.

C'est pourquoi il n'est pas plus restrictif de parler de graphe Lipschitz invariant que de graphe C^0 lagrangien invariant, et dans la suite tous nos graphes seront supposés lipschitziens.

De plus, toutes les orbites partant d'un tel graphe invariant sont globalement minimisantes (voir par exemple [Fa1]), donc sans point conjugué.

Comme nous les utiliserons par la suite, mettons ces résultats en valeur :

Résultats : *Tout graphe C^0-lagrangien invariant par un flot de Tonelli dans le cas autonome, par le temps 1 d'un flot de Tonelli dans le cas dépendant du temps, est lipschitzien. De plus, l'orbite de tout point d'un tel graphe est globalement minimisante au sens de la section 3.3.*

Par souci de complétude concernant les résultats sur les graphes lipschitz, signalons aussi les résultats obtenus par J. Mather dans [Mat1], résultats qui concernent les supports des mesures minimisantes.

Un autre résultat nous sera, puisque nous utiliserons dans certaines démonstrations le fait que l'espace tangent à un graphe lipschitz lagrangien en un point de différentiabilité est dans le tangent à une hypersurface d'énergie :

Résultat : *Tout graphe lipschitz lagrangien invariant par le flot d'un hamiltonien de Tonelli autonome est contenu dans une hypersurface d'énergie.*
La justification de ce résultat est élémentaire : soit λ la 1-forme fermée qui définit le graphe invariant $\mathcal{G}_\lambda$ nous intéressant et x un point de différentiabilité de λ. De l'invariance par le flot de X_H on déduit de $X_H(\lambda(x)) \in T_{\lambda(x)}\mathcal{G}_\lambda$. Aussi, le sous-espace lagrangien $T_{\lambda(x)}\mathcal{G}_\lambda$ est dans l'orthogonal de $X_H(\lambda(x))$ pour la forme symplectique, c'est-à-dire dans le noyau de $DH(\lambda(x))$. On en déduit qu'en (Lebesgue) presque tout point de M (ceux où λ est différentiable), on a : $D(H \circ \lambda)(x) = 0$. Le résultat en découle.

4.1 Inégalités entre les fibrés de Green et les différentielles généralisées des graphes lagrangiens invariants

Dans cette section, on suppose que $u : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi telle que $d_x u(.,0) = d_x u(.,1)$, et on définit : $u_0 = u(.,0)$. Le graphe N de $\lambda = du_0$ est lipschitzien et est invariant par le flot hamiltonien au temps 1. Nous convenons de noter pour chaque $t \in \mathbb{R}$ $N_t = \phi_t(N) \subset T^*M$ (donc pour $n \in \mathbb{Z}$, $N_n = N$), $\widetilde{\mathcal{N}} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} N_t \times \{t\} \subset T^*M \times \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathcal{N}}_1 = \bigcup_{t\in[0,1]} N_t \times \{t\} \subset T^*M \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{N} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} N_t \times \{\bar{t}\} = \bigcup_{t\in[0,1]} N_t \times \{\bar{t}\} \subset T^*M \times \mathbb{T}$. Remarquons de N_t est le graphe de du_t, où $u_t = u(.,t)$ et que donc N_t est une sous-variété Lipschitz exacte symplectique de T^*M.

4.1.1 Etude aux points de différentiabilité

Par le théorème de Rademacher, λ est donc différentiable Lebesgue presque partout. Nous allons commencer par montrer un résultat concernant la différentielle en ces points de différentiabilité.

Proposition 4.3. *Soit $x \in M$ un point de différentiabilité de du_0. Alors, l'espace tangent en $(x, \lambda(x))$ à N est un sous-espace lagrangien noté T_xN qui vérifie : $G_-(x) \prec T_xN \prec G_+(x)$.*

Démonstration de la proposition 4.3 : Soit x un point de différentiabilité de λ. Comme $N_t = \phi_t(N)$, en tout point $\phi_t(x)$ de l'orbite de x il existe un tangent à N_t, donc comme du_t est lipschitzienne, c'est un point de différentiabilité de du_t (on ne pourrait avoir un espace tangent qui ne soit pas transverse à la verticale). Donc si $(y,t) \in \tilde{\mathcal{N}}$ et y est un point de différentiabilité de du_t, T_yN_t est un sous-espace lagrangien transverse à la verticale $V(y)$. Aussi, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $D\phi_t^{t+\tau}(y)(T_yN_t) = T_{\phi_t^{t+\tau}(y)}N_{t+\tau}$ est transverse à $D\phi_t^{t+\tau}(y)V(y)$.

Si $x \in N$, on définit alors : $F(t) = T_{\phi_t(x)}N_t$. Ce fibré vérifie toutes les hypothèses de la proposition 3.11, donc aussi sa conclusion. $\square$

4.1.2 Notions de vecteurs tangents généralisés et de différentielle généralisée

Aux points de différentiabilité de u_0, nous avons réussi à "coincer" le sous-espace tangent entre les deux fibrés de Green. Nous aimerions obtenir un résultat similaire aux points où la fonction n'est pas différentiable. Dans ce cas, nous somme amenés à introduire une notion de "vecteur tangent généralisé à N en x".

Définition 4.4. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $h : U \to \mathbb{R}^n$ un plongement topologique. Soit $x \in U$. Un vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ est dit* vecteur tangent généralisé *à h en x s'il existe une suite (x_k) de points de U tendant vers x, une suite (t_k) de réels strictement positifs tendant vers 0 telles que :*

$$w = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k}(h(x_k) - h(x)).$$

On note alors $T_x^G h$ l'ensemble de ces vecteurs. C'est un cône appelé cône tangent à h.

Bien entendu, dans le cas où h est différentiable en x de différentielle en x injective, ce cône n'est rien d'autre que l'image de $Dh(x)$.On montre alors facilement :

Proposition 4.5. *Si $\psi : (\mathbb{R}^n, h(x)) \to (\mathbb{R}^n, \psi \circ h(x))$ est un difféomorphisme local et $\varphi : (\mathbb{R}^d, \varphi^{-1}(x)) \to (\mathbb{R}^d, x)$ est un homéomorphisme local, alors : $T^G_{\varphi^{-1}(x)}(\psi \circ h \circ \varphi) = D\psi(h(x))T_x^G h$.*

Cette proposition nous permet d'étendre la notion de vecteur tangent généralisé à des plongement topologiques de sous-variétés dans des variétés. Si maintenant on s'intéresse au graphe N de λ avec λ lipschitzienne, on conviendra de noter $T_x^G N = T_x^G(\lambda)$. On dira que $T_x^G N$ est l'*espace tangent généralisé* à N ; un de ses éléments sera un "*vecteur tangent généralisé à N en x*". De la proposition 4.5, on déduit que si ψ est un difféomorphisme de T^*M qui envoie le graphe $N(\lambda)$ de λ) sur le graphe $N(\mu)$ de μ, alors : $\forall q \in M, T^G_{\psi(\lambda(q))}N(\mu) = D\psi(\lambda(q))T^G_{\lambda(q)}N(\lambda)$. En particulier, le "fibré tangent généralisé" à un graphe invariant par le difféomorphisme ψ est invariant par $D\psi$.

Proposition 4.6. *Soit N le graphe lipschitz de $\lambda : M \to T^*M$. Soit $x \in M$ en lequel : $T_x^G\lambda$ est un plan P. Alors λ est différentiable en x et le plan tangent à N en $\lambda(x)$ est P.*

Démonstration de la proposition 4.6 : Adoptons les hypothèses de l'énoncé. Comme λ est lipschitzienne, le plan P est transverse à la verticale $V(\lambda(x))$, et est donc le graphe d'une application linéaire $L : T_xM \to T_{\lambda(x)}(T^*M)$. Supposons que λ ne soit pas différentiable en x ; passant en coordonnées pour pouvoir soustraire des points, on trouve une suite (x_k) de points différents de x qui converge vers x et un $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|\lambda(x_k) - \lambda(x) - L(x_k - x)\| \geq \varepsilon \|x_k - x\|$$

i.e :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \| \frac{1}{\|x_k - x\|} \left(\lambda(x_k) - \lambda(x)\right) - L(\frac{x_k - x}{\|x_k - x\|})\| \geq \varepsilon$$

quitte à extraire une sous-suite, on peut :

- supposer que la suite $\left(\frac{x_k - x}{\|x_k - x\|}\right)$ converge vers un vecteur w de norme 1 ;
- comme λ est lipschitzienne supposer que la suite $\left(\frac{1}{\|x_k - x\|} \left(\lambda(x_k) - \lambda(x)\right)\right)$ converge vers $W \in T_x^G\lambda \subset T_{\lambda(x)}(T^*M)$. Remarquons qu'alors $D\pi^*(\lambda(x))W = w$.

On a alors : $\|W - Lw\| \geq \varepsilon$, donc $W \in T_x^G\lambda \backslash P = \emptyset$, donc on obtient une contradiction. □

Nous introduisons maintenant la notion de *différentielle généralisée* d'une application lipschitzienne, puis expliquerons dans le cadre qui nous intéresse comment relier les deux notions. Cette notion de différentielle généralisée est couramment utilisée en optimisation non lisse.

Définition 4.7. *Soient M, N deux variétés et $\lambda : M \to N$ une application lipschitzienne. On sait alors que l'ensemble D des points de M en lesquels λ est différentiable est une partie dense de M (par le théorème de Rademacher). Pour chaque $x \in M$, on appelle* différentielle généralisée *de λ en x et on note $D^G\lambda(x)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble des valeurs d'adhérences des suites de la forme $(D\lambda(x_k))$ avec $x_k \in D$ et $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.*

Par le théorème de Carathéodory, la différentielle généralisée de λ en x est automatiquement une partie compacte (et non vide) de $L(T_xM, T_{\lambda(x)}N)$ puisque c'est l'enveloppe convexe d'une partie compacte (compacte car λ est lipschitzienne) en dimension finie. Remarquons que même en un point de différentiabilité de λ, sa différentielle généralisée peut contenir plus qu'un seul élément. Par contre :

Proposition 4.8. *Si $\lambda : M \to N$ est lipschitzienne, si pour un $x \in M$ $D^G\lambda(x_0)$ ne contient qu'un élément noté L, alors λ est différentiable en x et $D\lambda(x) = L$.*

Démonstration de la proposition 4.8 : On se place en carte (ce qui permet de soustraire) et on suppose que le résultat soit faux. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite (x_k) tendant vers x telle que :

$$\forall n, \frac{\|\lambda(x_n) - \lambda(x) - L(x - x_n)\|}{\|x - x_n\|} \geq \varepsilon.$$

On choisit alors $\alpha > 0$ tel que : $\forall y \in B(x, 2\alpha) \cap D, \|L - D\lambda(y)\| < \frac{\varepsilon}{4}$. De plus, on note $R = \|L\| + \varepsilon$. A partir d'un certain rang N, les x_n sont tous dans $B(x, \alpha)$. On utilise alors le fait que λ est lipschitzienne pour dire que D est de mesure pleine, puis Fubini pour trouver pour chaque $n \geq N$

un $y_n \in B(x, \frac{\alpha}{2})$ tel que $\|\frac{y_n - x_n}{\|x_n - y_n\|} - \frac{x - x_n}{\|x - x_n\|}\| < \frac{\varepsilon}{4R}$, $\frac{\|\lambda(x) - \lambda(y_n)\|}{\|x_n - y_n\|} \leq \frac{\varepsilon}{4}$, $\|x - x_n\| = \|y_n - x_n\|$ et pour presque tout $t \in [0,1]$, $tx_n + (1-t)y_n \in D$. On majore alors pour $n \geq N$ la quantité $\frac{\|\lambda(x_n) - \lambda(x) - L(x - x_n)\|}{\|x - x_n\|}$ par :

$$\frac{\|\lambda(x) - \lambda(y_n)\|}{\|x - x_n\|} + \|(\int_0^1 D\lambda(ty_n + (1-t)x_n) - L)dt)\frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|}\| + \|L\|.\|\frac{y_n - x_n}{\|y_n - x_n\|} - \frac{x - x_n}{\|x - x_n\|}\|$$

qui est majoré par $\frac{3\varepsilon}{4}$, ce qui contredit le choix de ε. □

On en déduit immédiatement :

Corollaire 4.9. *Soit $\lambda\ : M \to N$ lipschitzienne et $x \in M$. On a équivalence de :*

- *$D^G\lambda(x)$ est un singleton ;*
- *λ est différentiable en x et x est un point de continuité de $D\lambda$.*

Dans le cas où $D^G\lambda(x)$ ne contient qu'un élément, on en déduit que λ est différentiable en x et donc que si de plus $D\lambda(x)$ est injective, alors $T_x^G\lambda$, cône tangent à λ, est un plan. En fait, il existe une relation entre le cône tangent et la différentielle généralisée, bien connue des gens qui font de l'optimisation non lisse :

Proposition 4.10. *Soit $\lambda\ : M \to N$ une application bi-lipschitzienne et $x \in M$. Alors :*

$$T_x^G\lambda \subset \{Lv; v \in T_xM, L \in D^G\lambda(x)\}.$$

Nous en donnons rapidement une démonstration :

Démonstration de la proposition 4.10 : On raisonne en carte. Soit $v \in T_x^G\lambda$. Il existe alors une suite (t_k) de réels strictement positifs tendant vers 0 et une suite (x_k) de points de M convergent vers x tels que :

$$v = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{t_n}(\lambda(x_n) - \lambda(x)).$$

Comme λ est bilipschitz, il existe $c > 0$ tel que : $\forall x, y, \|\lambda(x) - \lambda(y)\| \geq c\|x - y\|$. On en déduit que la suite de terme général $(\frac{\|x_n - x\|}{t_n})$ est bornée.

Comme dans la démonstration précédente, on choisit y_n proche de x tel que $\frac{1}{t_n}\|\lambda(y_n) - \lambda(x)\| \leq \frac{1}{n}$, $\|x_n - y_n\| = \|x_n - x\|$ et pour presque tout $t \in [0,1]$, λ est différentiable en $tx_n + (1-t)y_n$. Le vecteur v est alors la limite de la suite de terme général :

$$U_n = \frac{1}{t_n}(\lambda(x_n) - \lambda(y_n)) = \frac{1}{t_n}\int_0^1 D\lambda(ty_n + (1-t)x_n)(y_n - x_n)dt.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|})$ converge vers w. On a alors :

$$U_n = \frac{\|x_n - y_n\|}{t_n}\int_0^1 D\lambda(ty_n + (1-t)x_n)(w + o(1))dt.$$

On a vu que la suite $(\frac{\|x_n - y_n\|}{t_n}) = (\frac{\|x_n - x\|}{t_n})$ est bornée, donc quitte à extraire une sous-suite on peut supposer qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$. Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, 2\alpha)$, il existe $L_y \in D^G\lambda(x)$ tel que $\|L_y - D\lambda(y)\| < \varepsilon$; on peut même choisir L_y de façon mesurable en fonction de y. Aussi, pour n assez grand :

$$\|U_n - \left(\int_0^1 L_{ty_n+(1-t)x_n} dt\right)(\ell + o(1))(w + o(1))\| \leq (\ell + o(1))\varepsilon\|w + o(1)\|$$

On a : $L = \int_0^1 L_{ty_n+(1-t)x_n} dt \in D^G\lambda(x)$ donc $v = L(\ell.w)$ est de la forme voulue. □

4.1.3 Encadrement de la différentielle généralisée et des vecteurs tangents généralisés

Revenons au cas qui nous intéresse, c'est-à-dire à l'étude des graphes lipschitz lagrangiens invariants, graphes de du. Dans ce cas, l'application du est un plongement qui est bi-lipschitz, et on est donc dans le cadre de la proposition 4.10, et si $x \in M$, tout vecteur tangent généralisé au graphe N de du est dans l'image d'une différentielle généralisée de du en x.

Proposition 4.11. *Soit $u : M \to \mathbb{R}$ de classe C^1 à dérivée lipschitzienne telle que le graphe N de du est invariant par (ϕ_1). Alors :*

$$\forall x \in M, \forall L \in D^G(du)(x), G_-(\lambda(x)) \prec L(T_xM) \prec G_+(\lambda(x))$$

Cette proposition découle immédiatement de la proposition 4.3 : il suffit de passer à la limite en utilisant la semi-continuité de G_- et G_+.
Ainsi, en quelque sorte, les "sous-espaces tangents généralisés" en x à N, que l'on trouve en prenant les limites des sous-espaces tangents aux points de différentiabilité de du, sont "coincés" entre les deux fibrés de Green, au sens de l'ordre entre les sous-espaces lagrangiens que nous avions défini précédemment. En ce qui concerne le "cône tangent" en x à N, que nous avions noté T_x^GN, on peut donc dire :
pour tout $v \in T_x^GN$ vecteur tangent généralisé à N en x, il existe un sous-espace lagrangien $L \subset T_x(T^*M)$ tel que $v \in L$ et $G_-(x) \prec L \prec G_+(x)$.

Remarquons que pour un tel $v \in T_x^GN$, on a alors par définition de la relation d'ordre entre les sous-espaces lagrangiens : $\omega(x)(v, (D\pi^*(x)_{|G_+(x)})^{-1}(D\pi^*(x)v)) \geq 0$ et
$\omega(x)(v, (D\pi^*(x)_{|G_-(x)})^{-1}(D\pi^*(x)v)) \leq 0$, i.e. plus simplement en coordonnées, si $G_+(x)$ est le graphe de S_+ et $G_-(x)$ celui de S_-, si $v = (v_1, v_2)$:

$$^tv_1S_+v_1 - {}^tv_1.v_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad {}^tv_1.v_2 - {}^tv_1S_-v_1 \geq 0.$$

On peut alors se demander si la vérification de ces deux dernières conditions pour un vecteur $v \in T_x(T^*M)$ suffisent pour obtenir l'existence de $L \subset T_x(T^*M)$ sous-espace lagrangien tel que $v \in L$ et $G_-(x) \prec L \prec G_+(x)$. La réponse est non, comme le lecteur peut s'en convaincre avec l'exemple suivant :

$$S_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; S_+ = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; v = (1, 0, 2, 3)$$

Dans ce cas, on cherche L comme graphe de $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ telle que $S_- \prec S \prec S_+$; or, dans ce cas forcément $d \in [1, 3]$ et $S_+ - S = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 3-d \end{pmatrix}$ a un déterminant négatif et est donc indéfinie.

Par contre, bien entendu, si M est de dimension 1, la condition signifie juste qu'une pente est comprise entre deux valeurs.

4.2 Résultats de régularité des graphes C^0 lagrangiens invariants

4.2.1 Lien entre la dynamique sur un graphe invariant et la régularité sur ce graphe

Proposition 4.12. *Soit $L\ : TM\times\mathbb{T}^1\to\mathbb{R}$ un lagrangien satisfaisant les hypothèses de Tonelli, $H\ : T^*M\times\mathbb{T}^1\to\mathbb{R}$ le hamiltonien qui lui est associé et $\mathcal{G}$ un graphe C^0-lagrangien invariant par le temps 1 du flot hamiltonien de H. On suppose que :*

$$\forall x\in\mathcal{G}, G_+(x)=G_-(x).$$

Alors le graphe $\mathcal{G}$ est de classe C^1 et :

$$\forall x\in\mathcal{G}, T_x\mathcal{G}=G_+(x)=G_-(x).$$

Démonstration de la proposition 4.12 : Soit λ l'application dont $\mathcal{G}$ est le graphe. De la proposition 4.11, on déduit que :

$$\forall x\in M,\forall L\in D^G(\lambda)(x), G_-(\lambda(x))\prec L(T_xM)\prec G_+(\lambda(x))$$

ce qui implique qu'en tout point x de M, $D^G(\lambda)(x)$ est un singleton et le corollaire 4.9 implique alors qu'en chaque $x\in M$, λ est différentiable et $D\lambda$ est continue. $\square$

Corollaire 4.13. *Soit $L\ : T\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^1\to\mathbb{R}$ un lagrangien satisfaisant les hypothèses de Tonelli, $H\ : T^*\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^1\to\mathbb{R}$ le hamiltonien qui lui est associé et $\mathcal{G}$ un graphe C^0-lagrangien invariant par le temps 1 du flot hamiltonien de H. On suppose que le temps 1 du flot hamiltonien de H restreint à $\mathcal{G}$ est bi-lipschitz conjugué à une rotation.*
Alors le graphe $\mathcal{G}$ est de classe C^1.

Démonstration du corollaire 4.13 : Notons F le temps 1 du flot hamiltonien de H et f sa restriction à $\mathcal{G}$. Il existe alors une rotation $R\ : \mathbb{T}^n\to\mathbb{T}^n$ (définie par $R(\theta)=\theta+\alpha$) et un homéomorphisme bilipschitz $h\ : \mathcal{G}\to\mathbb{T}^n$ tel que $f=h^{-1}\circ R\circ h$. Soit alors C une constante de Lipschitz commune à h et h^{-1}. Comme R est un isométrie, on a alors :

$$\forall x,y\in\mathcal{G}, d(F^n(x),F^n(y)\leq C^2d(x,y);$$

soit alors $x\in M$ et $v\in T_x^G\lambda$ (où $\mathcal{G}$ est le graphe de λ). Il existe donc une suite (x_k) de points de M tendant vers x, une suite (t_k) de réels strictement positifs tendant vers 0 telles que :

$$w=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{t_k}(\lambda(x_k)-\lambda(x))$$

(bien entendu, la soustraction précédente n'a pas de sens si on ne se place pas en cartes). On a alors (toujours avec la convention qu'on travaille en cartes pour définir la soustraction de points) :

$$\forall k,n\in\mathbb{N},\forall x,y\in M,\frac{1}{t_k}\|f^n(\lambda(x_k))-f^n(\lambda(x))\|\leq C^2\frac{1}{t_k}\|\lambda(x_k)-\lambda(x)\|$$

donc en passant à la limite :

$$\|Df^n(\lambda(x))w\|\leq C^2\|w\|.$$

Aussi, par le critère dynamique d'appartenance aux fibrés de Green (proposition 3.17), $w \in G_-(\lambda(x))$. Donc : $T_x^G\lambda \subset G_-(\lambda(x))$. Du fait que $\mathcal{G}$ est un graphe lipschitz, on déduit aisément qu'en chaque point x on a : $D\pi^*(x)T_x^G\lambda = T_xM$, donc forcément : $T_x^G\lambda = G_-(\lambda(x))$. Grâce à la proposition 4.6, on en déduit que λ est différentiable en x et que $T_{\lambda(x)}\mathcal{G} = G_-(\lambda(x))$; de façon analogue, $T_{\lambda(x)}\mathcal{G} = G_+(\lambda(x))$ et donc finalement $G_-(\lambda(x)) = G_+(\lambda(x))$, ce qui permet de conclure par la proposition 4.12. □

Corollaire 4.14. *Soit $L : T\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ un lagrangien satisfaisant les hypothèses de Tonelli, $H : T^*\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ le hamiltonien qui lui est associé et $\mathcal{G}$ un graphe continu invariant par le temps 1 du flot hamiltonien de H. On suppose que le temps 1 du flot hamiltonien de H restreint à $\mathcal{G}$ est bi-lipschitz conjugué à un difféomorphisme du cercle de classe C^2 de nombre de rotation irrationnel.*
Alors le graphe $\mathcal{G}$ est de classe C^1

Démonstration du corollaire 4.14 : On utilise le résultat VII-1-9 contenu dans [He1] : étant donné un difféomorphisme g du cercle de classe C^2 et de nombre de rotation α irrationnel, si les q_n désignent les dénominateurs des réduites de α, il existe une constante $c > 0$ telle que : $\forall x \in \mathbb{T}^1, \frac{1}{c} \leq g^{q_n}{}'(x) \leq c$. Ceci implique que les applications g^{q_n}, g^{-q_n} sont toutes c-lipschitzienne. Si maintenant $f_{|\mathcal{G}}$ est bi-lipschitz conjuguée à une telle application g, il existe alors une constante $C > 0$ telle que les $f_{|\mathcal{G}}^{q_n}$, $f_{|\mathcal{G}}^{-q_n}$ sont toutes C-lipschitziennes. On conclut alors de manière analogue à ce qui a été faite dans la démonstration du corollaire 4.13.

□

4.2.2 Le cas des petites dimensions

Dans le cas des lagrangiens indépendants du temps à deux degrés de liberté, un phénomène intéressant se produit : les graphes continus invariants sans point critique du hamiltonien sont en fait plus réguliers que simplement Lipschitz : ils sont en quelque sorte “de classe C^1” sur un ensemble de mesure pleine, i.e : dans le cas autonome à deux degrés de liberté, les solutions correspondantes de classe C^1 de l'équation de Hamilton-Jacobi sont “de classe C^2” sur un ensemble de mesure pleine.

Proposition 4.15. *Soit M une variété de dimension 2, $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangien indépendant du temps satisfaisant les hypothèses de Tonelli, $H : T^*M \to \mathbb{R}$ le hamiltonien qui lui est associé et $\mathcal{G}$ un graphe C^0-lagrangien invariant par le flot hamiltonien de H qui ne contient pas de point critique. Soit λ la 1-forme fermée (au sens des distributions) dont $\mathcal{G}$ est le graphe. Alors, il existe un G_δ dense D de mesure pleine de M tel qu'en tout point de D, la différentielle généralisée de λ soit un singleton. En particulier, en chaque point de D, λ est différentiable et $D\lambda$ est continue.*

Rappelons le résultat correspondant dans le cas non autonome :

Proposition 4.16. *Soit $L : T\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ un lagrangien satisfaisant les hypothèses de Tonelli, $H : T^*\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ le hamiltonien qui lui est associé et $\mathcal{G}$ un graphe continu invariant par le temps 1 du flot hamiltonien de H. On suppose que ce graphe invariant est le graphe de λ. Alors il existe un G_δ dense D de mesure pleine de $\mathbb{T}$ tel qu'en tout point de D, la différentielle généralisée de λ soit un singleton. En particulier, en chaque point de D, λ est différentiable et $D\lambda$ est continue.*

Avec des hypothèses légèrement différentes, ce dernier résultat est démontré dans [Arn1]. La démonstration dans ce cas en est une copie, nous ne la donnons pas ici. Nous allons nous contenter de démontrer la proposition 4.15 :

Démonstration de la proposition 4.15 : Prenons les hypothèses de la proposition. On a vu qu'on peut, quitte à changer le hamiltonien, supposer que le graphe invariant $\mathcal{G}$ est exact : $\lambda = du_0$ avec $u_0 \in C^1(M, \mathbb{R})$. De plus, on a vu qu'alors, λ est automatiquement lipschitzienne et que toute orbite issue de $\mathcal{G}$ est globalement minimisante donc sans point conjugué. Ceci permet de définir les fibrés de Green G_- et G_+ en tout point de $\mathcal{G}$, ainsi que les fibrés de Green réduits g_- et g_+ en ces mêmes points.

La proposition 3.9 nous dit que $D = \{x \in M; G_-(x, \lambda(x)) = G_+(x, \lambda(x))\}$ est un G_δ de M. D'après la proposition 4.11, on sait alors que :

$$\forall x \in M, \forall L \in D^G(du_0)(x), G_-(x) \prec L(T_xM) \prec G_+(x)$$

ce qui implique qu'en tout point x de D, $D^G(du_0)(x)$ est un singleton et le corollaire 4.9 implique alors qu'en chaque $x \in D$, λ est différentiable et $D\lambda$ est continue.

Il nous faut alors, pour conclure, montrer que D est de mesure pleine. Soit donc μ une mesure de Lebesgue sur M, définie à l'aide d'une métrique riemanienne. On a : $\mu(M) = \int_M d\mu$. Notons (φ_t) le flot $(\phi_{t|\mathcal{G}})$ projeté sur M. Comme chaque (φ_t) est un homéomorphisme bi-lipschitzien, on a en faisant un changement de variable : $\mu(M) = \int_E |\det(D\varphi_t)| d\mu$ (cette différentielle $D\varphi_t$ est définie presque partout, sur un ensemble noté E, qui est invariant par le flot (φ_t)) ; tout point de E est un point de différentiabilité de λ, où det est pris dans des bases de volume 1. Aussi, pour toute suite $\mathcal{T} = (t_n)$ de réels, on trouve en utilisant le lemme de Fatou :

$$+\infty > \mu(M) \geq \int_E \liminf_{n\to\infty} |\det(D\varphi_{t_n})| d\mu$$

donc en presque tout $x \in M$, on a : $\liminf_{n\to\infty} |\det(D\varphi_{t_n}(x))| < +\infty$; on note alors $D(\mathcal{T})$ (qui est une partie de E) l'ensemble de ces points, qui est donc de mesure pleine. Quand la suite (t_n) est bornée, ceci est une évidence en tout point de x.

Par contre, quand la suite (t_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on déduit du fait que $x \in D(\mathcal{T})$ que $G_-(\lambda(x)) = T_{\lambda(x)}\mathcal{G}$ (resp. $G_+(\lambda(x)) = T_{\lambda(x)}\mathcal{G}$). Expliquons pourquoi. On aura ainsi montré que D est de mesure pleine et fini la démonstration.

Supposons donc par exemple que $\liminf_{n\to\infty} |\det(D\varphi_{t_n}(x))| < +\infty$ avec $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$. Le long de l'orbite de x, λ est différentiable et la projection sur M $\pi^*_{|\mathcal{G}}$ restreinte au graphe est différentiable, de différentielle uniformément bornée, et d'inverse différentiable et de différentielle uniformément bornée (ceci car le graphe est lipschitzien). Aussi, si on choisit de remonter les bases de volume 1 de T_xM en des bases de volume 1 de $T_{\lambda(x)}\mathcal{G}$ par cette application (cela revient à dire quelle forme volume on utilise le long de l'orbite de $\lambda(x)$), on en déduit que : $\liminf_{n\to\infty} |\det(D\phi_{t_n}(\lambda(x))_{|T\mathcal{G}})| < +\infty$.

Comme le champ de vecteurs X_H n'a pas de singularité sur le compact $\mathcal{G}$, il existe une constante $C > 1$ telle que :

$$\forall y, z \in M, \frac{1}{C} \leq \frac{\|X_H(\lambda(z))\|}{\|X_H(\lambda(y))\|} \leq C.$$

Aussi : $\|D\phi_{t_n}(x)X_H(\lambda(x))\| = \|X_H(\phi_{t_n}\lambda(x))\| \geq \frac{1}{C}\|X_H(\lambda(x))\|$. Si maintenant on regarde l'action M_{t_n} de $D\phi_{t_n}$ sur la droite $T\mathcal{G}/\mathbb{R}X_H$, du fait que suivant $X_H(\lambda(x))$ les $D\phi_{t_n}$ ne contractent pas trop et du fait que $\liminf_{n\to\infty} |\det(D\phi_{t_n}(\lambda(x))_{|T\mathcal{G}})| < +\infty$, on déduit :

$$\liminf_{n\to\infty} \|M_{t_n}(\lambda(x))_{|T_{\lambda(x)}\mathcal{G}/\mathbb{R}X_H(\lambda(x))}\| < +\infty.$$

A l'aide de la proposition 3.17, on en déduit que $T_{\lambda(x)}\mathcal{G}/\mathbb{R}X_H(\lambda(x)) \subset g_-(\lambda(x))$, donc que $T_{\lambda(x)}\mathcal{G} \subset G_-(\lambda(x))$, donc que $T_{\lambda(x)}\mathcal{G}(\lambda(x)) = G_-(\lambda(x))$.

$\square$

Question : que se passe-t-il quand le graphe invariant contient des singularités ?
Nous n'avons pu démontrer un résultat analogue à la proposition 4.15 que dans le cas où les singularités sont toutes non dégénérées. Dans le cas général, le problème reste ouvert.

Définition 4.17. *Soit x_0 une singularité du hamiltonien H (c-à-d $X_H(x_0) = 0$) ; on dit qu'elle est non dégénérée si $DX_H(x_0)$ a toutes ses valeurs propres deux à deux distinctes.*

Rigoureusement, cette définition est fausse puisque $DX_H(x_0)$ n'a pas même espace de départ et d'arrivée, mais il existe une façon canonique et standard d'identifier ces deux espaces.

Pour un hamiltonien de classe C^k avec $k \in [2, \infty]$, la propriété d'avoir toutes ses singularités non dégénérées est générique. Pour un tel hamiltonien, les singularités sont alors isolées. Comme de plus elles forment un ensemble fermé, tout compact de T^*M n'en contient qu'un nombre fini.

Proposition 4.18. *Soit M une variété de dimension 2, $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangien indépendant du temps satisfaisant les hypothèses de Tonelli, $H : T^*M \to \mathbb{R}$ le hamiltonien qui lui est associé dont on suppose que toutes les singularités sont non dégénérées.*
Soit $\mathcal{G}$ un graphe C^0-lagrangien invariant par le flot hamiltonien de H. Soit λ la 1-forme fermée (au sens des distributions) dont $\mathcal{G}$ est le graphe.
Alors, il existe un G_δ dense D de mesure pleine de M tel qu'en tout point de D, la différentielle généralisée de λ soit un singleton. En particulier, en chaque point de D, λ est différentiable et $D\lambda$ est de classe C^1.

Bien entendu, le théorème 1 est une conséquence immédiate de cette proposition.
Démonstration de la proposition 4.18 : On prend les hypothèses de l'énoncé. Si x_0 est un point critique qui appartient à $\mathcal{G}$, alors il est forcément hyperbolique. Supposons en effet que ce ne soit pas le cas. Comme x_0 est une singularité non dégénérée, chaque $D\phi_t(x_0)$ est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$). Supposons que $DX_H(x_0)$ ait une valeur imaginaire pure $i\lambda$. Il existe alors un plan symplectique $P \subset T_{x_0}(T^*M)$ invariant par $(D\phi_t(x_0))$ tel que les valeurs propres de chaque $D\phi_t(x_0)_{|P}$ soient $e^{\pm it\lambda}$. Alors, pour chaque $v \in P$, l'ensemble $\{D\phi_t(x_0)v; t \in \mathbb{R}\}$ est borné et donc $P \subset G_-(x_0) \cap G_+(x_0)$. Mais comme P est symplectique, il ne peut pas être inclus dans un plan lagrangien, d'où une contradiction.
La situation est donc la suivante : l'ensemble $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$ des points critiques contenus dans $\mathcal{G}$ est fini, et chacun de ses points est hyperbolique.

La réunion des variétés stables des s_i intersectées avec $\mathcal{G}$, $W = \bigcup_{i=1}^{n} W^s(s_i) \cap \mathcal{G}$, est alors mesurable. Il en est de même de $R = \mathcal{G}\backslash W$. On va alors montrer que pour presque tout point de R et presque tout point de W, on a : $T_x\mathcal{G} = G_-(x)$. On en déduira qu'en presque tout point de $\mathcal{G}$, $T_x\mathcal{G} = G_-(x)$ et de façon symétrique $T_x\mathcal{G} = G_+(x) = G_-(x)$, d'où le résultat cherché.
<u>Cas où $x \in R$:</u> On construit pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ et chaque $k \in \mathbb{N}$ un petit disque $D_k(i) \subset \mathcal{G}$ ouvert contenant s_i dont la frontière est un lacet lipschtizien. On suppose les $D_k(i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ deux à deux disjoints et que : $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_k(i) = \{s_i\}$. On peut aussi supposer chaque suite $(D_k(i))_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante et poser : $D_k = \bigcup_{1\leq i\leq n} D_k(i)$ et $R_k = \mathcal{G}\backslash D_k$. On note alors $f = \phi_1$

le temps 1 du flot hamiltonien restreint à $\mathcal{G}$ et F_k^m l'application (non définie partout) qui à un point x de R associe le $m$ième point de l'orbite de x sous f à appartenir à R_k. Soit E_k l'intersection des ensembles de définition des F_k^m pour $m \in \mathbb{N}^*$ avec R_k, alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k = R$ puisque si $x \in R$, il existe un point $y \in \omega(x)$ de l'ensemble ω-limite de x qui n'est pas dans $\mathcal{S}$, donc dans l'un des R_k. On va alors montrer que pour chaque k, pour presque tout $x \in E_k$, on a : $T_x\mathcal{G} = G_-(x)$, ce qui donnera le résultat cherché en presque tout point de R. Déjà, on se limite aux points de E_k en lesquels $\mathcal{G}$ admet un plan tangent (ceci est vrai presque partout car on a une variété lipschitzienne), et qui ne sont pas sur $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} f^{-m}(\partial D_k) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \phi_{-m}(\partial D_k)$; on note E'_k leur ensemble ; à cause de l'hypothèse faite lors de la construction de $D_k(i)$, E'_k est de mesure pleine dans E_k. Soit alors $x \in E'_k$. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, il existe $n_m = n_m(x) \geq m$ tel que $F_k^m(x) = f^{n_m}(x) = \phi_{n_m}(x) \in R_k$. Vu les hypothèses faites dans la définition de E'_k, pour y assez proche de x, on a $n_m(y) = n_m(x) = n_m$ et : $F_k^m(y) = f^{n_m}(y) = \phi_{n_m}(y)$, et donc F_k^m est différentiable en x, de différentielle : $DF_k^m(x) = D\phi_{n_m}(x)_{|T_x\mathcal{G}}$. On a alors, si μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{G}$:

$$\mu(R_k) \geq \mu(F_k^m(E'_k)) = \int_{E'_k} (F_k^m)_*(d\mu) = \int_{E'_k} |\det(DF_k^m)| d\mu = \int_{E'_k} |\det(D\phi_{n_m|T\mathcal{G}})| d\mu.$$

Donc en utilisant le lemme de Fatou, en presque tout point de E'_k :

$$\liminf_{m\to\infty} |\det(D\phi_{n_m(x)}(x)_{|T_x\mathcal{G}})| < +\infty$$

De plus, vu la définition de R_k, il existe $C \geq 1$ tel que :

$$\forall y, z \in R_k, \frac{1}{C} \leq \frac{\|X_H(z)\|}{\|X_H(y)\|} \leq C$$

Comme dans la démonstration de la proposition 4.16, de ceci et du fait que :

$$\liminf_{m\to\infty} |\det(D\phi_{n_m(x)}(x)_{|T\mathcal{G}_x})| < +\infty$$

on déduit que si on passe au quotient $p : T\mathcal{G} \to T\mathcal{G}/\mathbb{R}X_H(x)$ par X_H, on obtient :

$$\liminf_{m\to\infty} \|p \circ D\phi_{n_m}(x)_{|T_x\mathcal{G}}\| < +\infty.$$

A l'aide de la proposition 3.17, on en déduit que $T_{\lambda(x)}\mathcal{G}/\mathbb{R}X_H(x) \subset g_-(x)$, donc que $T_x\mathcal{G} \subset G_-(x)$, donc que $T_x\mathcal{G}(x) = G_-(x)$.
<u>Cas où $x \in W$:</u> déjà, $W_1 = W \backslash \mathcal{S}$ est de mesure pleine dans W. On appellera W_{loc} l'intersection de la réunion des variétés locales stables des s_i avec $\mathcal{G}$. Soit alors $x \in W_1$; il existe alors $T > 0$ tel que $x \in \phi_{-T}(W_{\text{loc}})$. On dira alors que x est *simple* s'il existe un voisinage U_x de x tel que les seuls points de U_x contenus dans $\phi_T(W_{\text{loc}})$ sont ceux qui sont sur l'orbite de x : en d'autres termes, l'orbite de x est "isolée" dans la variété locale stable de $\mathcal{S}$. L'ensemble des points simples de W est alors un ensemble de mesure nulle. Aussi, on travaillera désormais dans W', ensemble des points de W_1 qui ne sont pas simples et en lesquels $\mathcal{G}$ admet un espace tangent. Cet ensemble est de mesure pleine dans W. Si maintenant $x \in W'$, alors pour un i on a : $x \in \phi_{-T}(W^s_{\text{loc}}(s_i))$; du fait que x n'est pas simple, on déduit alors que : $T_x\mathcal{G} = T_xW^s(s_i)$; comme : $G_-(x) = T_xW^s(s_i)$, on en déduit le résultat cherché.

□

Soulignons que le phénomène de coïncidance presque partout des deux fibrés de Green est un phénomène typique aux basses dimensions : nous donnons parmi les exemples qui vont suivre un exemple de graphe invariant de dimension 3 sur lequel le flot hamiltonien est hyperbolique, donc les fibrés de Green transverses. Dans ce cas donc, sans hypothèse supplémentaire sur la dynamique, on ne saurait espérer utiliser les fibrés de Green pour montrer une régularité supérieure à Lipschitz pour les graphes invariants.

Exemple de graphe C^0 lagrangien invariant qui n'est pas de classe C^1 : en fait, on ne connait pas d'exemple de tel graphe qui soit très "sauvage". L'exemple le plus simple est celui formé par la séparatrice du pendule simple rigide, qui donne un graphe partout C^1 sauf en un point. Bien entendu, en faisant un produit direct de tels pendules, on a un exemple en dimension plus grande. Il existe dans [He2] des exemples analogues pour les difféomorphismes de l'anneau déviant la verticale.

Exemple de graphe invariant pour un système à trois degrés de liberté tel que les fibrés de Green sont transverses dans la surface d'énergie en tout point du graphe Considérons un flot géodésique hyperbolique défini sur le fibré tangent unitaire $C = T^1S$ d'une surface S à courbure négative. Soit X le champ de vecteurs associé à la métrique riemannienne considérée : $X : C \to TC$ est de classe C^∞. On définit alors $L : TC \to \mathbb{R}$ par $L(x, v) = \|v - X(x)\|^2$ où $\|.\|$ est une métrique quelconque de C. Alors, L est un lagrangien de Tonelli, et le graphe dans TC de X est formé de courbes minimisantes, donc est une variété invariante par le flot d'Euler-Lagrange. Si $H : T^*C \to$ désigne le hamiltonien de Tonelli associé à L, son flot (ϕ_t) laisse invariant la section nulle N de T^*C (qui est un graphe C^∞ lagrangien) et la restriction du flot à cette section nulle est Anosov. De ceci et du caractère symplectique du flot hamiltonien, on déduit que si $\mathcal{E}$ désigne la surface d'énergie qui contient la section nulle, alors la restriction de $(D\phi_t)$ à $T\mathcal{E}_{|N}$ est partiellement hyperbolique, avec un fibré central de dimension 1 dirigé par le champ de vecteurs hamiltonien. Aussi, les fibrés de Green, qui coïncident avec les variétés stables et instables, sont transverses dans la surface d'énergie en tout point de N, et on n'a donc pas, comme dans le cas des systèmes à deux degrés de libertés, coïncidance des deux fibrés presque partout.

Aussi, dans ce cas, la méthode développée pour démontrer la proposition 4.15 ne peut s'appliquer. Bien sûr, ceci ne prouve pas que le résultat de cette proposition soit faux en plus de degrés de liberté, et il serait intéressant de donner un contre-exemple dans ce cas.

4.2.3 Le cas intégrable

Dans cette partie, nous allons devoir de faire appel à la théorie de Mather-Mañé-Fathi développée dans [Mat1], [Man1] et [Fa2].

Notation 3. *Etant donné une variété M, $\Lambda(M)$ désignera l'ensemble des 1-formes fermées* continues *de M.*

Définition 4.19. *Un hamiltonien de Tonelli $H : T^*M \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est C^0*-intégrable *s'il existe une partie $\Lambda_1 \subset \Lambda(M)$ telle que :*

1. *l'application $\lambda \in \Lambda_1 \to [\lambda] \in H^1(M)$ est surjective ;*
2. *pour chaque $\lambda \in \Lambda_1$, le graphe $\mathcal{G}_\lambda$ de λ est invariant par le flot hamiltonien (ϕ_t^H) de H dans le cas autonome, par le temps 1 de ce flot dans le cas dépendant du temps ;*

3. l'ensemble $\{\mathcal{G}_\lambda; \lambda \in \Lambda_1\}$ est une partition de T^*M.

Exemple : Si on munit le tore $\mathbb{T}^n$ de sa métrique plate, le hamiltonien obtenu est C^0 intégrable ; de plus, les tores invariants correspondants sont tous dans ce cas de classe C^∞ (et non seulement continus).

Nous allons commencer par nous limiter au cas autonome, afin en particulier de pouvoir utiliser les résultats de [Arn4] et [Fa2] sans trop de difficulté. Ensuite, nous nous intéresserons au cas dépendant du temps, un peu plus délicat.

Remarque 4.20. *1. Si $H : T^*M \to \mathbb{R}$ est C^0-intégrable et autonome, nous verrons un peu plus loin qu'il existe une action de $\mathbb{T}^1$ sur M qui est sans point fixe. Ainsi, M ne peut être n'importe quelle variété (sa caractéristique d'Euler est nulle, mais on a même mieux) ; si par exemple M est une surface, c'est forcément un tore.*

2. Avec ces hypothèses, l'application $\lambda \in \Lambda_1 \to [\lambda] \in H^1(M)$ est injective. En effet, si elle n'est pas injective, il existe $\lambda, \mu \in \Lambda_1$ tels que $\lambda \neq \mu$ et $[\lambda] = [\mu]$. Or, deux graphes de même classe de cohomologie s'intersectent ; on a donc : $\mathcal{G}_\lambda \cap \mathcal{G}_\mu \neq \emptyset$ et $\mathcal{G}_\lambda \neq \mathcal{G}_\mu$, ce qui contredit le fait que $\{\mathcal{G}_\nu; \nu \in \Lambda_1\}$ est une partition de T^*M ;

3. Avec ces hypothèses, Λ_1 est exactement l'ensemble des graphes C^0 invariants par (ϕ_t^H). En effet, si $\mathcal{G}_\lambda$ est invariant par (ϕ_t^H) pour un certain $\lambda \in \Lambda(M)$, soit $\mu \in \Lambda_1$ tel que $[\mu] = [\lambda]$. Si $\lambda \neq \mu$, il existe $\eta \in \Lambda_1$ tel que $\eta \neq \mu$ et $\mathcal{G}_\eta \cap \mathcal{G}_\lambda \neq \emptyset$. Soit alors $(x,p) \in \mathcal{G}_\eta \cap \mathcal{G}_\lambda$. Alors comme $\mathcal{G}_\lambda$ est inclus dans l'ensemble de Mañé dual $\mathcal{N}^*([\lambda])$ (voir [Arn4] pour les notations/définitions), l'ensemble W ω-limite de (x,p) est dans l'ensemble d'Aubry dual $\mathcal{A}^*([\lambda]) = \mathcal{A}^*([\mu]) \subset \mathcal{G}_\mu$; comme de plus $\mathcal{G}_\eta$ est fermé et invariant par (ϕ_t^H), on a aussi : $W \subset \mathcal{G}_\eta$ donc finalement $W \subset \mathcal{G}_\eta \cap \mathcal{G}\mu$, ce qui contredit $\mathcal{G}_\mu \cap \mathcal{G}_\eta = \emptyset$.

Théorème 4. *Soit $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien de Tonelli C^0-intégrable et $\Lambda_1 \subset \Lambda(M)$ tel que $\{\mathcal{G}_\lambda; \lambda \in \Lambda_1\}$ soit une partition de T^*M en graphes C^0 lagrangiens invariants par le flot hamiltonien (ϕ_t^H) de H.*
Alors, il existe un G_δ dense $G(H)$ de Λ_1 dont tout élément est de classe C^1.

L'ingrédient essentiel pour prouver ce théorème est :

Proposition 4.21. *Soit $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien de Tonelli C^0-intégrable et $\Lambda_1 \subset \Lambda(M)$ tel que $\{\mathcal{G}_\lambda; \lambda \in \Lambda_1\}$ soit une partition de T^*M en graphes C^0 lagrangiens invariants par le flot hamiltonien (ϕ_t^H) de H.*
Alors, il existe une partie dense D de Λ_1 tel que pour chaque $\lambda \in D$, $\mathcal{G}_\lambda$ est rempli par des orbites périodiques pour (ϕ_t^H) de même période et deux à deux homotopes.

Démonstration de la proposition 4.21 : Nous allons adopter un angle d'attaque déjà développé dans [Arn4]. On considère H et Λ_1 comme dans l'énoncé.

Etant donné $T > 0$, on considère une orbite $(\phi_t^H(x,p))_{t\in\mathbb{R}}$ telle que : $\pi^*(\phi_T^H(x,p)) = x$. Alors, il existe un $\lambda \in \Lambda_1$ tel que $(x,p) \in \mathcal{G}_\lambda$. Comme $\mathcal{G}_\lambda$ est un graphe invariant par le flot, on a forcément : $\phi_T(x,p) = (x,p)$ et donc (x,p) est périodique. En d'autres termes et avec la terminologie développée dans [Arn4], tout point radialement transformé est périodique.

Fixons une classe d'homotopie de lacet Γ dans M et une période $T > 0$. Pour chaque $x \in M$, il existe $p \in T_x^*M$ tel que $(\pi^* \circ \phi_t^H(x,p))_{t\in[0,T]}$ minimise l'action lagrangienne parmi les chemins $\gamma : [0,T] \to M$ absolument continus de Γ qui joignent x à x. Dans ce cas, $(\phi_t^H(x,p))_{t\in\mathbb{R}}$ est une orbite T périodique (grâce au paragraphe précédent) incluse dans un certain graphe $\mathcal{G}_\lambda$ avec

$\lambda \in \Lambda_1$. Or, $\mathcal{G}_\lambda$ est contenu dans l'ensemble de Mañé dual $\mathcal{N}^*([\lambda])$ (voir [Fa2]) de la classe de cohomologie $[\lambda]$ de λ. Donc la mesure μ supportée par l'orbite périodique de (x,p) a son support inclus dans l'ensemble de Mather dual $\mathcal{M}^*([\lambda])$, puisque c'est une mesure invariante de support inclus dans l'ensemble de Mañé dual correspondant. De plus, la donnée de T et Γ détermine complètement le nombre de rotation ρ de cette mesure (voir [Mat1] pour la définition) et cette mesure μ est aussi une mesure minimisante à nombre de rotation ρ fixé. Si maintenant on fait varier x sans changer Γ et T, on trouve une autre mesure minimisante μ' qui a même nombre de rotation ρ ; elle est donc elle aussi minimisante parmi les mesures invariantes ayant ρ comme nombre de rotation. Elle est donc aussi minimisante pour la classe de cohomologie $[\lambda]$, comme l'était μ (ceci découle des résultats de J. Mather explicités dans la section 2 de [Mat1]). Elle est donc de support dans l'ensemble de Mather dual $\mathcal{M}^*([\lambda])$. Or, $\mathcal{M}^*([\lambda])$ est inclus dans l'ensemble d'Aubry dual $\mathcal{A}^*([\lambda])$, qui est inclus dans $\mathcal{G}_\lambda$ (voir [Fa2]). Donc le support de μ' est inclus dans le même graphe $\mathcal{G}_\lambda$ que μ. Aussi, $\mathcal{G}_\lambda$ est rempli par des orbites périodiques de même période et deux à deux homotopes.

Il reste à montrer que les λ que l'on trouve ainsi forment une partie dense de Λ_1. Commençons par montrer :

Lemme 4.22. *Sous ces hypothèses, si on fixe $x \in M$, l'application $\lambda \in \Lambda_1 \to \lambda(x) \in T_x^*M$ est un homéomorphisme.*

Démonstration du lemme 4.22 : Il s'agit d'une application continue et bijective. Si maintenant on fixe un compact K de T_x^*M, la réunion des niveaux d'énergie qui rencontrent K est un compact K_1 de T^*M. Il alors existe alors une constante $C > 0$ telle que tout graphe C^0 lagrangien inclus dans K_1 est C-lipschitzien. Ceci découle des résultats contenus dans [Fa2]. Un argument alternatif est de dire que les fibrés de Green sont uniformément “loin” de la verticale sur le compact sans point conjugué K_1 (sans point conjugué car tout point est sur un graphe C^0 lagrangien invariant), à cause des propriétés des fonctions semi-continues sur les compacts, donc les différentielles généralisées des graphes C^0 lagrangiens invariants contenus dans K_1 sont uniformément minorées et majorées. Grâce au théorème d'Ascoli, on en déduit alors que $\{\lambda \in \Lambda_1, \lambda(x) \in K\}$ est relativement compact dans $\Lambda(M)$.
Montrons qu'en fait il est compact. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Λ_1 telle que $\lambda_n(x) \in K$ qui converge vers $\lambda_\infty \in \Lambda(M)$. On veut montrer que $\lambda_\infty \in \Lambda_1$. Chaque $\mathcal{G}_{\lambda_n}$ étant invariant par (ϕ_t^H), il en est de même de $\mathcal{G}_{\lambda_\infty}$. Ceci joint au point 3. de la remarque 4.20 permet de conclure que $\lambda_\infty \in \Lambda_1$.
L'application considérée étant propre, c'est un homéomorphisme.

□

On a vu précédemment qu'à chaque $T > 0$ et chaque classe d'homotopie de lacets $h \in \pi_1(M)$, on peut associer une classe de cohomologie $\lambda(T,h) \in \Lambda_1$ telle que $\mathcal{G}_{\lambda(T,h)}$ est rempli par des orbites périodiques de période T et de classe d'homotopie h. Nous voulons montrer que $D = \{\lambda(T,h); T > 0 \quad \text{et} \quad h \in \pi_1(M)\}$ est dense dans Λ_1. Pour cela, on fixe $\lambda_0 \in \Lambda_1$. Alors, l'ensemble d'Aubry dual $\mathcal{A}^*([\lambda_0])$ est une partie non vide incluse dans $\mathcal{G}_{\lambda_0}$. Choisissons un $(x_0,p_0) = (x_0, \lambda_0(x_0)) \in \mathcal{A}^*([\lambda_0])$. A chaque $T > 0$, on associe $(x^T, p^T) : [0,T] \to T^*M$ orbite sous le flot hamiltonien (ϕ_t^H) telle que $x^T(0) = x^T(T) = x_0$ et pour tout chemin $\gamma : [0,T] \to M$ absolument continu et de même extrémités que x^T, $\int_0^T (L-\lambda_0)(x^T(t), \dot{x}^T(t))dt \leq \int_0^T (L-\lambda_0)(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$. On a alors : $\lim\limits_{T\to+\infty} (x^T(0), p^T(0)) = (x_0, p_0)$ (voir par exemple [Arn4]). Si maintenant h_T désigne la classe d'homotopie de x^T, on a à fortiori : $(x^T(0), p^T(0)) \in \mathcal{G}(\lambda(T, h_T))$, i.e : $(x^T(0), p^T(0)) = (x_0, \lambda(T, h_T)(x_0))$. Aussi : $\lim\limits_{T\to+\infty} \lambda(T, h_T)(x_0) = \lambda_0(x_0)$. Par le lemme 4.22, ceci implique que :

$$\lim_{T\to+\infty} \lambda(T, h_T) = \lambda_0$$

avec chaque $\lambda(T, h_T)$ dans D, donc prouve bien que D est dense dans Λ_1. □

Démonstration du théorème 4 : On reprend les mêmes hypothèses et notations que dans l'énoncé du théorème. Rappelons qu'alors dans ce cas toute orbite du flot hamiltonien (ϕ_t^H) est sans point conjugué. On peut donc définir en chaque $(x, p) \in T^*M$ les deux fibrés de Green $G_-(x, p)$ et $G_+(x, p)$. On a alors vu que : $E = \{(x, p) \in T^*M; G_-(x, p) = G_+(x, p)\}$ est un G_δ de T^*M. On reprend alors les notations de la proposition 4.21 ; alors, l'ensemble $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{\lambda\in D} \mathcal{G}(\lambda)$ est une partie dense dans T^*M. On va alors montrer que $\mathcal{D} \subset E$. On en déduira que E est un G_δ dense de T^*M.

Pour cela, considérons $\lambda = \lambda(T, h) \in D$. Alors :

$$\forall x \in M, \forall N \in \mathbb{Z}, \phi_{NT}^H(x, \lambda(x)) = (x, \lambda(x)).$$

Aussi, si $x \in M$ et si $w \in T_x^G\lambda$, on a : $\forall k \in \mathbb{Z}, D\phi_{kT}^H(x, \lambda(x))w = w$. De ceci et du critère dynamique (proposition 3.17), on déduit que : $T_{\lambda(x)}^G\mathcal{G} \subset G_+(\lambda(x)) \cap G_-(\lambda(x))$, et on conclut comme dans la fin de la démonstration du corollaire 4.13 que $\mathcal{G}_\lambda \subset E$.

Ayant maintenant montré que E est un G_δ dense de T^*M qui contient $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{\lambda\in D} \mathcal{G}_\lambda$, on s'intéresse à : $\Lambda_2 = \{\lambda \in \Lambda_1; \mathcal{G}_\lambda \subset E\}$. Puisque $D \subset \Lambda_2$, Λ_2 est dense dans Λ_1. Remarquons alors que : $F : (x, \lambda) \in M \times \Lambda_1 \to \lambda(x) \in T^*M$ est un homéomorphisme : c'est une conséquence assez immédiate du lemme 4.22. Aussi, $F^{-1}(E)$ est un G_δ dense de $M \times \Lambda_1$, G_δ qui contient $M \times D$. Ecrivons : $F^{-1}(E) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ où chaque U_n est un ouvert dense de $M \times \Lambda_1$. Comme chaque ensemble $M \times \{\lambda\}$ est compact, l'ensemble $V_n = \{\lambda \in \Lambda_1, M \times \{\lambda\} \subset U_n\}$ est ouvert et vérifie $M \times V_n \subset U_n$; comme il contient D, il est dense dans Λ_1. Aussi, $G(H) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est un G_δ dense de Λ_1 tel que $M \times G(H) \subset F^{-1}(E)$ i.e. tel que pour tout $\lambda \in G(H)$ et tout $x \in M$, $G_-(x, \lambda(x)) = G_+(x, \lambda(x))$. Par la proposition 4.12, ceci implique que chaque $\lambda \in G(H)$ est de classe C^1.

□

Le théorème 4 a son analogue dans le cas dépendant du temps :

Théorème 3 *Soit $H : T^*M \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ un hamiltonien de Tonelli C^0-intégrable et $\Lambda_1 \subset \Lambda(M)$ tel que $\{\mathcal{G}_\lambda; \lambda \in \Lambda_1\}$ soit une partition de T^*M en graphes C^0 lagrangiens invariants par le temps 1 du flot hamiltonien (ϕ_t^H) de H.*
Alors, il existe un G_δ dense $G(H)$ de Λ_1 dont tout élément est de classe C^1.

Remarque 4.23. *L'argument du troisième point de la remarque 4.20 reste valable dans le cas non autonome, et donc même dans ce cas, Λ_1 est exactement l'ensemble des graphes C^0 invariants par le temps 1 de (ϕ_t^H).*

On va aussi montrer un analogue de la proposition 4.21 :

Proposition 4.24. *Soit $H\;: T^*M\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ un hamiltonien de Tonelli C^0-intégrable et $\Lambda_1\subset\Lambda(M)$ tel que $\{\mathcal{G}_\lambda;\lambda\in\Lambda_1\}$ soit une partition de T^*M en graphes C^0 lagrangiens invariants par le temps 1 du flot hamiltonien (ϕ_t^H) de H.*
Alors, il existe une partie dense D de Λ_1 tel que pour chaque $\lambda\in D$, $\mathcal{G}_\lambda$ est rempli par des orbites périodiques pour (ϕ_1^H) de même période et deux à deux homotopes.

La différence entre la démonstration de cette proposition et celle de la proposition 4.21 vient du fait qu'il ne nous a pas été possible de démontrer un analogue du lemme 4.22 dans le cas dépendant du temps : dans le cas non autonome, sans hypothèse supplémentaire sur H, hormis le cas dans le cas du fibré cotangent du cercle (ce résultat est dû à Birkhoff), il ne nous a pas été possible de montrer que, étant donné un compact K fixé, l'ensemble des graphes C^0-lagrangiens qui rencontrent K est borné en C^0-topologie.
Démonstration de la proposition 4.24 : En raisonnant de façon similaire à ce qui est fait dans la démonstration de la proposition 4.21, on peut associer à chaque couple $(N,h)\in\mathbb{N}^*\times\pi_1(M)$ un $\lambda(N,h)\in\Lambda_1$ tel que $\mathcal{G}_{\lambda(N,h)}$ est rempli par des orbites périodiques de période N qui sont toutes homotopes à h.
Nous adoptons alors la terminologie développée dans [Be1] et [Be2] (sauf que par rapport à ces articles, pour ne pas surcharger, nous avons retiré les " ˜ " et que, comme c'est fait dans le cas autonome dans [Arn4], nous sommes passé via l'application de Legendre au fibré cotangent). Ainsi, si $c\in H^1(M,\mathbb{R})$ est une classe de cohomologie :

- $\mathcal{G}(c)$ est l'ensemble des points de T^*M dont l'orbite est minimisante pour $L-\lambda$ où λ désigne n'importe quelle 1-forme fermée de classe de cohomologie c ;
- $\mathcal{N}(c)$ est l'ensemble de Mañé dual associé à la classe c ;
- $\mathcal{A}(c)$ est l'ensemble d'Aubry dual associé à la classe c.

Rappelons qu'alors : $\mathcal{A}(c)\subset\mathcal{N}(c)\subset\mathcal{G}(c)$. De plus, si $(x,p)\in\mathcal{G}(c)$, alors l'ensemble ω-limite de (x,p) est dans $\mathcal{A}(c)$, et même : si une orbite est c-minimisante sur $[0,+\infty[$, alors son ensemble ω-limite est dans $\mathcal{A}(c)$ (ceci est démontré dans [Be1] par exemple).
Nous allons alors démontrer :

Lemme 4.25. *On reprend les hypothèses de la proposition. Alors, pour tout $\lambda\in\Lambda_1$, on a :*

$$\mathcal{G}_\lambda=\mathcal{A}([\lambda])=\mathcal{N}([\lambda])=\mathcal{G}([\lambda]).$$

Démonstration du lemme 4.25 : D'après [Be2], on a : $\mathcal{A}([\lambda])\subset\mathcal{G}_\lambda\subset\mathcal{N}([\lambda])\subset\mathcal{G}([\lambda])$.
Soit maintenant $(x,p)\in\mathcal{G}([\lambda])$. Il existe alors $\nu\in\Lambda_1$ tel que $(x,p)\in\mathcal{G}_\nu$. Alors :

- comme $(x,p)\in\mathcal{G}_\nu$ et comme $\mathcal{G}_\nu$ est invariant par le temps 1 du flot hamiltonien, on a : $\omega(x,p)\subset\mathcal{G}_\nu$;
- comme $(x,p)\in\mathcal{G}([\lambda])$, on a : $\omega(x,p)\subset\mathcal{A}([\lambda])\subset\mathcal{G}_\lambda$.

Donc $\lambda=\nu$ et on a : $\mathcal{G}([\lambda])=\mathcal{N}([\lambda])=\mathcal{G}_\lambda$.
Déterminons maintenant les solution KAM faibles associées à la classe de cohomologie $[\lambda]$, où plutôt, suivant la terminologie de [Be2], les pseudo-graphes qui sont des points fixes du semi-groupe de Lax-Oleinik associé à la classe de cohomologie $[\lambda]$. Comme l'ensemble ω-limite d'un point d'un tel pseudo-graphe est dans $\mathcal{A}([\lambda])$, forcément ce pseudographe est inclus dans $\mathcal{G}_\lambda$ (puisque sinon son ensemble ω-limite serait dans un $\mathcal{A}([\nu])$ avec $\nu\in\Lambda_1$ et $\nu\neq\lambda$). Donc ce pseudo-graphe est $\mathcal{G}_\lambda$. Aussi, avec les notations de [Be2] :

$$\mathcal{A}([\lambda])=\mathcal{I}(\mathcal{G}_\lambda)=\mathcal{G}_\lambda.$$

□

Lemme 4.26. *Soit $\lambda \in \Lambda_1$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout $N \geq N_0$, pour tout $x \in M$, si $\gamma\ : [0, N] \to M$ absolument continue minimise l'action de $L - \lambda$ entre x et x, alors : $\|\dot\gamma(0) - \frac{\partial H}{\partial r}(x, \lambda(x))\| < \varepsilon$.*

Démonstration du lemme 4.26 : Si ce lemme est faux, on trouve une suite (N_k) tendant vers $+\infty$, une suite de chemins absolument continus minimisant $\gamma_k\ : [0, N_k] \to M$ tels que $\gamma_k(0) = \gamma_k(N_k) = x_k$ et tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|\dot\gamma_k(0) - \frac{\partial H}{\partial r}(x_k, \lambda(x_k), 0)\| \geq \varepsilon \quad (*)$$

le lemme de compacité à priori (voir par exemple [Be1], lemme 2.3) nous permet d'affirmer que la suite $(\dot\gamma_k(0))$ est bornée, donc quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que :

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_k(0) = x_\infty \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \dot\gamma_k(0) = v_\infty.$$

Soit (x_∞, p_∞) l'image de (x_∞, v_∞) par l'application de Legendre. Etant limite d'orbites minimisantes (voir par exemple [Be1]), l'orbite de (x_∞, p_∞) est minimisante sur $[0, +\infty[$. Son ensemble ω-limite est donc dans $\mathcal{A}([\lambda]) = \mathcal{G}_\lambda$; on a déjà vu que cela implique que (x_∞, p_∞) est dans $\mathcal{G}_\lambda$; aussi : $\|v_\infty - \frac{\partial H}{\partial r}(x_\infty, \lambda(x_\infty), 0)\| = 0$ puisque $p_\infty = \lambda(x_\infty)$. Ceci contredit $(*)$. □

Comme dans la démonstration de la proposition 4.21, nous allons prendre pour D :

$$D = \{\lambda(N, h); N \in \mathbb{N}^*, h \in \Pi_1(M)\}.$$

Pour montrer que D est dense dans Λ_1, fixons $\lambda \in \Lambda_1$ et $\varepsilon > 0$. Grâce au lemme 4.26, on trouve un entier $N > 0$ tel que, pour tout $x \in M$, toute courbe $\gamma\ : [0, N] \to M$ minimisante pour $L - \lambda$ joignant x à x vérifie que : $\|\dot\gamma(0) - \frac{\partial H}{\partial r}(\gamma(0), \lambda(\gamma(0), 0)\| \leq \varepsilon$. Remarquons que d'après ce qu'on a fait précédemment, en fait γ est la projection d'une orbite N périodique du flot hamiltonien. De plus, par des propriétés classiques sur les minima des fonctions continues, l'ensemble E des $(x, p) \in T^*M$ tels que $(t \in [0, N] \to \pi^* \circ \phi_t(x, p))$ est minimisant pour $L - \lambda$ parmi les courbes joignant x à x est un compact. On peut donc choisir $(x_0, p_0) \in E$ qui minimise la quantité $\int_0^N (L - \lambda)(\frac{d}{dt}(\pi^* \circ \phi_t(x, p)), t)dt$. Si h désigne la classe d'homotopie de $(\phi_t(x_0, p_0))_{t\in[0,N]}$, alors $(x_0, p_0) \in \mathcal{G}_{\lambda(N,h)}$. De plus, tout point (x, p) de $\mathcal{G}_{\lambda(N,h)} = \mathcal{N}([\lambda(N, h)])$ a son orbite qui est N-périodique et dans la classe d'homotopie h ; aussi la mesure équidistribué sur cette orbite est $(L - \lambda(N, h))$ minimisante, donc a même $(L - \lambda(N, h))$-action que la mesure équidistribuée sur l'orbite de (x_0, p_0) :

$$\int_0^N (L - \lambda(N, h))(\frac{d}{dt}(\pi^* \circ \phi_t(x, p)), t)dt = \int_0^N (L - \lambda(N, h))(\frac{d}{dt}(\pi^* \circ \phi_t(x_0, p_0)), t)dt$$

Comme ces deux orbites sont dans la même classe d'homotopie, on en déduit que :

$$\int_0^N (L - \lambda)(\frac{d}{dt}(\pi^* \circ \phi_t(x, p)), t)dt = \int_0^N (L - \lambda)(\frac{d}{dt}(\pi^* \circ \phi_t(x_0, p_0)), t)dt$$

Vu comment on a choisi (x_0, p_0) dans E, cela implique que $(x, p) \in E$, i.e : $\mathcal{G}(\lambda(N, h)) \subset E$, donc $\lambda(N, h)$ est proche de λ.

□

Démonstration du théorème 3 : On commence par remarquer que Λ_1 est une partie fermée de $\Lambda(M)$ muni de la topologie de la convergence uniforme, donc un espace de Baire. En effet, Λ_1 est aussi l'ensemble des graphes C^0-lagrangiens invariants par le temps 1 du flot hamiltonien, ce qui est une condition fermée.
On en déduit que $\Lambda_1 \times M$ est aussi un espace de Baire. De plus, l'application $((\lambda, x) \in \Lambda_1 \times M \to (x, \lambda(x))$ étant continue, l'ensemble $\mathcal{E} = \{(\lambda, x) \in \Lambda_1 \times M; G_-(x, \lambda(x)) = G_+(x, \lambda(x))\}$ est un G_δ qui contient $D \times M$, donc un G_δ dense de $\Lambda_1 \times M$. Un argument similaire à celui utilisé dans la démonstration du théorème 4 nous permet de conclure que $\{\lambda \in \Lambda_1; \forall x \in M, G_-(x, \lambda(x)) = G_+(x, \lambda(x))\}$ est un G_δ dense de Λ_1.

□

5 Appendice

Comme annoncé en début de section 4, nous allons donner une démonstration du classique résultat :
si le graphe de du_0 (avec $u_0 \in C^1(M, \mathbb{R})$) est invariant par le temps 1 du flot hamiltonien (ϕ_t) du hamiltonien de Tonelli H, il existe $u \in C^1(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$(H - J) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + H(d_x u(x, t), t) = 0$$

et vérifie :

- $\forall x \in M, u(x, 0) = u_0(x)$;
- $\forall x \in M, d_x u(x, 1) = d_x u(x, 0)$.

La démonstration que nous donnons nécessite d'être familier avec la théorie K.A.M. faible. Nous utilisons dans cet appendice des notions qui sont développées dans [Be2].

La notion fondamentale utilisée dans [Be2] est la notion de fonction semi-concave. Nous n'en rappelons pas la définition ici (disons que localement, i.e. en carte, c'est la somme d'une fonction concave et d'une fonction de classe C^2 (et même C^∞)). En plus de savoir que certaines fonctions classiques sont semi-concaves, ce qui va nous servir est la propriété suivante des fonctions semi-concaves : soit u une fonction semi-concave et v une fonction de classe C^1. Soit x_0 un point en lequel un minimum local de $u+v$ est atteint. Alors u est différentiable en x_0 et $du(x_0) = -dv(x_0)$.

Expliquons maintenant quelles sont les fonctionnelles classiques qui sont semi-concaves. Etant donné $s > t$ deux réels et x et y deux points de M, suivant [Be2], on convient de noter $\Sigma(t, x; s, y)$ l'ensemble des courbes absolument continues $\gamma : [t, s] \to M$ telles que $\gamma(t) = x$ et $\gamma(s) = y$. On sait alors définir :

$$A(t, x; s, y) = \min_{\gamma \in \Sigma(t,x;s,y)} \int_t^s L(\sigma, \gamma(\sigma), \dot{\gamma}(\sigma)) d\sigma;$$

l'ensemble des courbes en lequel le minimum est atteint est alors noté $\Sigma_m(t, x; s, y)$ et est compact pour la topologie de la convergence uniforme. Il est alors montré dans [Be2] que chaque $(x, y) \to A(t, x; s, y)$ est semi-concave et que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. l'ensemble $\Sigma_m(t, x; s, y)$ est réduit à un point ;
2. la fonction $A(t, .; s, y)$ est différentiable en x ;

3. la fonction $A(t,x;s,.)$ est différentiable en y.

De plus, en un tel point, si on note $\Sigma_m(t,x;s,y)=\{\gamma\}$ on a :

$$\left(-\frac{\partial L}{\partial v}(t,x,\dot\gamma(t)),\frac{\partial L}{\partial v}(s,y,\dot\gamma(s))\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial x}(t,x;s,y),\frac{\partial A}{\partial y}(t,x;s,y)\right).$$

Pour démontrer le résultat annoncé, considérons $u_0\in C^1(M,\mathbb{R})$ telle que le graphe de du_0 est invariant par le flot hamiltonien (ϕ_t) du hamiltonien de Tonelli H. Posons alors : $\mathcal{L}(x,y)=A(0,x;1,y)$, puis $K(x,y)=u_0(x)+\mathcal{L}(x,y)-u_0(y)$. Comme u_0 est de classe C^1 et comme $\mathcal{L}$ est semi-concave, chaque point x en lequel le minimum de $K(.,y)$ est atteint est un point de différentiabilité de $\mathcal{L}$ par rapport à x, donc par le résultat rappelé auparavant un point de différentiabilité de $\mathcal{L}$ par rapport à y et il existe une seule courbe minimisante γ dans $\Sigma_m(0,x;y,1)$. De plus :

$$du_0(x)=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial L}{\partial v}(0,x,\dot\gamma(0))\quad\text{et}\quad\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial L}{\partial v}(0,y,\dot\gamma(1)).$$

Aussi, $(\gamma,\dot\gamma)$ est l'orbite du flot d'Euler-Lagrange qui correspond à l'orbite $(\phi_t(x,du_0(x)))_{t\in[0,1]}$ du flot hamiltonien. Le fait que γ soit unique implique que si $y\neq y'$, si on leur associe comme précédemment les chemins γ et γ', alors : $\forall t\in[0,1],\gamma(t)\neq\gamma'(t)$. On en déduit que pour chaque $t\in[0,1]$, l'image par ϕ_t du graphe de du_0 est un graphe. Du fait que (ϕ_t) est un flot hamiltonien, on déduit que ce graphe est C^0 lagrangien (et même exact lagrangien), graphe de du_t. il n'est pas difficile d'en déduire l'existence d'une solution de classe C^1 de l'équation de Hamilton-Jacobi, solution de la forme : $u(x,t)=u_t(x)+c(t)$.

Références

[Arn1] M.-C. Arnaud, *Three results on the regularity of the curves that are invariant by an exact symplectic twist map*, à paraître aux Publ. Math. Inst. Hautes Éudes Sci.

[Arn2] M.-C. Arnaud, *Type des orbites périodiques des flots associés à des lagrangiens optiques homogènes* Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **37** (2006), no. 2, 153–190.

[Arn3] M.-C. Arnaud, *Hyperbolic periodic orbits and Mather sets in certain symmetric cases*, Ergodic Theory Dynam. Systems **26** (2006), no. 4, 939–959.

[Arn4] M.-C. Arnaud, *The tiered Aubry set for autonomous Lagrangian functions*, à paraître aux Ann. Inst. Fourier (Grenoble) .

[Be1] P. Bernard *Connecting orbits of time dependent Lagrangian systems* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** , no. 5, 1533–1568 (2002) .

[Be2] P. Bernard *The Dynamics of Pseudographs in Convex Hamltonian Systems* , à paraître à J. Amer. Math. Soc.

[Bo-Vi] J. Bochi & M. Viana *Lyapunov exponents : how frequently are dynamical systems hyperbolic ?* Modern dynamical systems and applications, 271–297, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2004).

[Bi-Ma] Misha.L Bialy & Robert S. MacKay, *Symplectic twist maps without conjugate points.* Israel J. Math. **141**, 235–247 (2004).

[C-I] Gonzalo Contreras & Renato Iturriaga, *Convex Hamiltonians without conjugate points* Ergodic Theory Dynam. Systems **19** , no. 4, 901–952 (1999).

[Fa1] Albert Fathi, *Regularity of C^1 solutions of the Hamilton-Jacobi equation.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **12** no. 4, 479–516 (2003).

[Fa2] A. Fathi, *Weak KAM theorems in Lagrangian dynamics*, livre en préparation.

[Fo1] Patrick Foulon, *Estimation de l'entropie des systèmes lagrangiens sans points conjugués* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **57** , no. 2, 117–146 (1992).

[Gr] Leon W. Green,*A theorem of E. Hopf* Michigan Math. J. **5** 31–34 (1958).

[He1] M. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **49** (1979), 5–233.

[He2] Michael-R. Herman, *Inégalités "a priori" pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques.* , vol. I, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **70**, 47–101 (1989)

[He3] Michael-R. Herman, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau,* Astérisque, **103-104**, (1983).

[He4] M. Herman, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau,* Astérisque, **144**, (1986).

[It1] Renato Iturriaga, *A geometric proof of the existence of the Green bundles.* Proc. Amer. Math. Soc. **130** , no. 8, 2311–2312 (2002).

[Li-Ma] Paulette. Libermann & Charles-Michel Marle, Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique. Tome I. Publications Mathématiques de l'Université Paris VII , **21.** *Université de Paris VII, U.E.R. de Mathématiques*, Paris, 176 pp (1986)

[Man1] R. Mané, *Lagrangian flows : the dynamics of globally minimizing orbits*, Int. Pitman Res. Notes Math. Ser., **362**, 120-131 (1996).

[Mat1] J. Mather, *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems*, Math. Z. **207**, 169-207 (1991).

[Mat2] J. Mather, *Variational construction of connecting orbits*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **43** no. 5, 1349–1386 (1993).

[We1] Alan Weinstein, *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds.* Advances in Math. 6 1971 329–346 (1971)

[Y] J.-C. Yoccoz, *Travaux de Herman sur les tores invariants,* Séminaire Bourbaki **784**, Astérisque, **206**, 311–344, (1992).

Marie-Claude Arnaud (Marie-Claude.Arnaud@univ-avignon.fr)
Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse
Laboratoire d'Analyse non linéaire et Géométrie (EA 2151)
F-84 018 Avignon
France