Approximation des ensembles ω-limites des difféomorphismes par des orbites périodiques

Marie-Claude ARNAUD *

15 avril 2002

The ω-limit sets of generic C^1 diffeomorphisms are limits of periodic orbits

Abstract

Let M be a compact manifold, D the set of its C^1-diffeomorphisms (possibly symplectic or volume preserving). We prove that there exists a dense G_δ $\mathcal{G}$ of D such that if $f \in \mathcal{G}$, every ω-limit set of f is the limit (for the Hausdorff topology) of a sequence of periodic orbits. This has certain interesting consequences concerning the structure of the ω-limit sets. Moreover, we define a new notion of attractors and describe precisely them in different cases.

Résumé

Soit M une variété compacte, D l'ensemble de ses difféomorphismes (éventuellement symplectiques ou qui préservent une forme volume) de classe C^1. On montre qu'il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ de D tel que si $f \in \mathcal{G}$, tout ensemble ω-limite de f est limite (pour la topologie de Hausdorff) d'une suite d'orbite périodique. On en déduit certaines conséquences concernant la structure des ensembles ω-limites. De plus, nous définissons une nouvelle notion d'attracteurs et les décrivons précisément dans différents cas.

1 Introduction

Dans l'étude des systèmes dynamiques, les points périodiques ont toujours occupé une place privilégiée. Leur avantage est qu'à un point périodique on peut aisément associer un certain nombre de quantités bien définies : multiplicateurs de Floquet (ou

*EA 2151, Laboratoire d'Analyse non linéaire et Géométrie, UFR Sciences, Université d'Avignon, 33, rue Louis Pasteur, 84 000 Avignon, France. e-mail : Marie-Claude.Arnaud@univ-avignon.fr

valeurs propres), espaces propres, éventuellement variétés stable et instable .... Ensuite, si une suite d'orbites périodiques d'un système dynamique fixé tend vers un ensemble K, il est parfois possible de déduire de ce qu'on connait sur ces orbites périodiques certaines informations sur K (hyperbolicité, existence d'une décomposition dominée ...). C'est pourquoi nous allons dans notre article démontrer le théorème suivant, puis en tirer des conséquences sur les ensembles ω-limites :

Théorème 1 *Soit M une variété compacte,* $\mathrm{Diff}^1(M)$ *l'ensemble des difféomophismes de classe C^1 de M. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ de* $\mathrm{Diff}^1(M)$ *tel que :*

si $f \in \mathcal{G}$, pour tout $x \in M$, il existe une suite $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'orbites périodiques de f qui converge pour la distance de Hausdorff vers $\omega(x, f)$.

Rappelons :

DÉFINITION. Si $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ et $x \in M$, l'ensemble ω-limite de x pour f, $\omega(x, f)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(f^n x)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans le cas conservatif, un résultat analogue existe. Si ω est une forme volume ou symplectique sur une variété M, $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ désignera l'ensemble des difféomorphismes de classe C^1 de M qui préservent ω. On a alors :

Théorème 2 *Soit ω une forme volume ou symplectique d'une variété compacte M. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ de* $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ *tel que si $f \in \mathcal{G}$, pour tout $x \in M$, il existe une suite d'orbites périodiques $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de f qui tend vers $\omega(x, f)$ pour la distance de Hausdorff.*

Les résultats que nous venons d'énoncer sont intermédiaires entre le "closing lemma" (voir [1] ou [16]), et des résultats qui permettent de fermer une orbite en approximant (en conservant l'ordre dynamique) un de ses morceaux tels :

- les résultats de pistage pour les ensembles hyperboliques (voir [17]) ;
- les résultats comme le "ergodic closing lemma" valable pour un sous-ensemble de mesure totale de points récurrents (voir [1] ou [12]) ou le lemme de fermeture d'orbite (voir [1] ou [2]) valable pour un G_δ dense de l'ensemble des points récurrents.

En fait, nous ne regardons pas ici l'action de f sur les points (comme pour le "closing lemma") ou sur les mesures (comme pour le "ergodic closing lemma"), mais l'action de f sur les compacts, et plus particulièrement on se demande si on peut approximer les "attracteurs" de f par des orbites périodiques.

L'argument principal de la démonstration est le "connecting lemma", annoncé sous la forme générale utilisée ici par S. Hayashi dans [10] et dont on peut trouver une démonstration dans [3].

Dans le cas des surfaces, on en déduit aisément :

Théorème 3 *Soit M une surface compacte. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que si $f \in \mathcal{G}$ et $x \in M$:*

- *soit $\omega(x, f)$ admet une décomposition dominée ;*
- *soit $\omega(x, f)$ est limite (pour la distance de Hausdorff) d'une suite d'orbites périodiques attractives ou répulsives*

où :

Définition. Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, K un ensemble invariant par f et $TM_{|K} = E \oplus F$ une décomposition du fibré tangent de M restreint à K en deux sous-fibrés invariants par f dont la fibre est de dimension constante non nulle. On dit que la décomposition est dominée (sur K) s'il existe $N \geq 1$ tel que :

$$\forall x \in K\,,\, \|Df^N(x)_{|E}\| \cdot \|Df^{-N}(f^N x)_{|F}\|^{-1} < \frac{1}{2}\,.$$

Signalons que dans la prépublication [6], C. Bonatti, L. Diaz et E. Pujals montrent le résultat en toute dimension dans le cas où $\omega(x, f)$ est une classe homocline non triviale, ce que je ne sais pas faire pour $\omega(x, f)$ quelconque. On pourrait penser utiliser le théorème 1 et appliquer le résultat de C. Bonatti, L. Diaz et E. Pujals aux classes homoclines des points périodiques ainsi trouvés. Malheureusement, rien ne nous dit que ces classes homoclines ne sont pas triviales, auquel cas [6] ne peut pas s'appliquer !

Citons alors le résultat suivant de R. Mañé dans le cas des surfaces compactes (voir [12] ($\Omega(f)$ désigne l'ensemble des points non errants de f)) : "il existe un G_δ dense $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que :

- si $f \in \mathcal{R}_1$, $\Omega(f)$ est hyperbolique ;
- si $f \in \mathcal{R}_2$, f a une infinité de puits ou de sources".

Il peut être affiné en adaptant juste la démonstration de R. Mañé en :

Proposition 4 *Soit M une surface compacte. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que si $f \in \mathcal{G}$ et $x \in M$:*

- *soit $\omega(x, f)$ est hyperbolique ;*
- *soit $\omega(x, f)$ contient la limite (pour la topologie de Hausdorff) d'une suite d'orbites périodiques attractives ou répulsives.*

Malheureusement, je n'ai pas réussi à remplacer "contient" par "est".

Signalons tout de même qu'on ne sait pas si on n'a pas $\mathcal{R}_2 = \emptyset$; S. Newhouse montre dans [14] que ce n'est pas le cas en topologie C^2 ; C. Bonatti et L. Diaz ont montré aussi dans [7] que ce n'est pas le cas en topologie C^1 quand $\dim M \geq 3$, mais on ignore ce qui se passe en topologie C^1 pour les surfaces.

Dans le cas conservatif (sans d'ailleurs utiliser le théorème 2) , on obtient le résultat suivant, qui affine les résultats de [4] (mais est une conséquence de la démonstration contenue dans [4]) :

Théorème 5 *Soit* (M, ω) *une variété symplectique connexe et compacte de dimension 4. Il existe un* G_δ *dense* $\mathcal{G}$ *de* $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ *tel que si* $f \in \mathcal{G}$ *et* $x \in M$*, l'une des trois situations suivantes se produit :*

(i) $\omega(x, f)$ *est hyperbolique ;*

(ii) f *est partiellement hyperbolique sur* $\omega(x, f)$ *;*

(iii) $\omega(x, f)$ *est inclus dans la limite (pour la topologie de Hausdorff) d'une suite d'orbites périodiques complètement elliptiques.*

Définition. Soit $f \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$;

- soit p un point périodique de f de période τ. On dit que p est complètement elliptique si toutes les valeurs propres de $Df^\tau(p)$ sont de module 1 et deux à deux distinctes ;
- soit A une partie invariante par f. Elle est partiellement hyperbolique s'il existe une décomposition
$$TM_{|A} = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$
telle que :
  a) $\dim E^s = \dim E^u = 1$, $\dim E^c = 2$;
  b) il existe $C > 0$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que :
$$\forall v \in E^s, \forall n \geq 0, \quad \|Df^n \cdot v\| \leq C\lambda^n \|v\|;$$
$$\forall w \in E^u, \forall n \geq 0, \quad \|Df^n \cdot w\| \geq \frac{1}{C\lambda^n}\|w\|;$$
  c) $\exists N \geq 1$, $\forall x \in A$, $\forall (u, v, w) \in (E^s \backslash \{0\}) \times (E^c \backslash \{0\}) \times (E^u \backslash \{0\})$,
$$\frac{\|Df^N(x) \cdot u\|}{\|u\|} \leq \frac{1}{2} \frac{\|Df^N(x) \cdot v\|}{\|v\|} \leq \frac{1}{4} \frac{\|Df^N(x) \cdot w\|}{\|w\|}$$

Maintenant, plutôt que de traiter le cas de tous les ensembles ω-limites d'un difféomorphisme, on peut s'intéresser à traiter seulement le cas de ceux qui sont des "attracteurs". Plus précisément, on aimerait savoir si on peut préciser les propriétés de certains ensembles ω-limites, ceux-ci étant choisis de telle sorte que la réunion de leurs bassins d'attraction recouvre "presque toute" la variété. Ainsi, on aura une description précise de l'ensemble ω-limite de "presque tout" point de M. Pour cela, commençons par rappeler le résultat de C. Moralès et M.-J. Pacifico démontré dans [13] :

"soit M une variété compacte, il existe un G_δ dense de $\mathcal{G}$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{G}$, il existe un G_δ dense G_f de M tel que : pour tout $x \in G_f$, $\omega(x, f)$ est positivement stable au sens de Liapounoff."

où :

Définition. Soit A une partie compacte non vide de M invariante par $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$. A est positivement stable au sens de Liapounoff si elle admet une base de voisinages $\mathcal{U}$ telle que : $\forall U \in \mathcal{U},\ f(U) \subset U$.

Ce résultat s'étend sans difficulté au cas des difféomorphismes qui préservent une forme volume ω fixée si $\dim M \geq 3$. Par contre, dans le cas des difféomorphismes symplectiques, je ne sais pas si ce résultat est vrai (le problème est qu'il existe alors stablement des points périodiques elliptiques, au voisinage desquels aucun analogue du "connecting lemma" n'est connu (voir [3] à ce sujet)). Remarquons que dans le cas conservatif, un ensemble positivement stable au sens de Liapounoff est aussi négativement stable au sens de Liapounoff ; on dira donc dans ce cas simplement "stable au sens de Liapounoff" (et alors il existe une base $\mathcal{U}$ de voisinages invariants : $\forall U \in \mathcal{U},\ f(U) = U$). On définit alors :

Définition. Une partie compacte non vide A de M est un attracteur au sens faible (A.S.F) de $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ si :

- A est positivement stable au sens de Liapounoff ;
- il existe $x \in M$ tel que $A = \omega(x, f)$.

Cette définition a plusieurs avantages : la donnée des A.S.F. de $f \in \mathcal{G}$ permet de donner les ensembles ω-limites de presque tout point de M (au sens de la catégorie de Baire) ; les A.S.F. sont vraiment des attracteurs car ils ne "repoussent" aucune orbite (aucune orbite ne s'en éloigne) et ils attirent vraiment au moins une orbite (si celle-ci est dans l'ensemble ω-limite, alors l'ensemble ω-limite est transitif) ; deux A.S.F. d'un même difféomorphisme sont soit disjoints, soit égaux ; enfin, dans le cas conservatif, on ne peut améliorer cette définition d'"attracteur".

Les théorèmes donnés précédemment peuvent alors être précisés dans le cas des attracteurs au sens faible :

Théorème 6 *Soit M une surface compacte. Il existe un G_δ dense de $\mathcal{G}$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{G}$, tout A.S.F. est :*

- *soit une classe homocline qui est un vrai attracteur hyperbolique ;*
- *soit contient la limite (pour la distance de Hausdorff) d'une suite d'orbites périodiques hyperboliques répulsives ou attractives.*

A la lumière du résultat de C. Morales et M.-J. Pacifico, cela nous permet de décrire l'ensemble ω-limite de presque tout point (au sens de la catégorie de Baire) de M :

Corollaire 7 *Soit M une surface compacte. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{G}$, il existe un G_δ dense G_f de M tel que pour tout $x \in G_f$:*

- *soit $\omega(x, f)$ est une classe homocline qui est un vrai attracteur hyperbolique ;*

– *soit $\omega(x,f)$ contient la limite d'une suite d'orbites périodiques hyperboliques répulsives et attractives.*

Dans le cas symplectique, on a :

Théorème 8 *Soit (M,ω) une variété symplectique connexe et compacte de dimension 4. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{G}$, pour tout A.S.F. A de f, alors $f_{|A}$ est transitif et l'une des trois situations suivantes se produit :*

(i) Soit $A = M$ et f est Anosov ;

(ii) soit f est partiellement hyperbolique sur A ;

(iii) soit il existe une suite d'orbites périodiques complètement elliptiques de f qui tend vers A (pour la distance de Hausdorff).

Mais dans ce cas, comme les résultats de C. Morales de M.-J. Pacifico ne s'appliquent pas, on ne sait pas s'il existe un A.S.F.

Dans le cas (ii) du théorème 8, on peut définir en chaque $x \in A$ des variétés fortes stables et instables (voir [8]), notées $W^{s,s}$ et $W^{u,u}$. Alors, A étant stable au sens de Liapounoff, on a :

$$\bigcup_{x\in A} (W^{s,s}(x,f) \cup W^{u,u}(x,f)) = A\,.$$

Donc A est laminé par ses variétés fortement stables et fortement instables ; ce serait le cas par exemple d'un tore symplectique T invariant normalement elliptique tel que $f_{|T}$ serait hyperbolique ; il peut aussi bien sûr arriver que $A = M$ et que f soit donc transitif et partiellement hyperbolique sur toute la variété (le fait que f soit partiellement hyperbolique sur M demeure par perturbations C^1, alors que si $T \neq M$, je ne sais pas si T normalement elliptique peut persister par de telles perturbations). Remarquons aussi que le cas (iii) du théorème (suite d'orbites périodiques complètement elliptiques tendant vers un ensemble invariant, mais pas forcément stable au sens de Liapounoff) peut se produire au voisinage des tores K.A.M (voir [5]).

Dans le cas des difféomorphismes qui préservent le volume, on obtient successivement :

Théorème 9 *Soit M une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 3 munie d'une forme volume ω. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ tel que si $f \in \mathcal{G}$, tout A.S.F. de f est limite (pour la distance de Hausdorff) d'une suite de classes homoclines non triviales d'orbite périodiques.*

(remarquons que la classe homocline d'une orbite périodique est plus grosse que la classe homocline du point périodique : c'est l'orbite de la classe homocline du point périodique)

Corollaire 10 *Soit M une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 3 munie d'une forme volume ω. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ tel que si $f \in \mathcal{G}$, il existe un G_δ dense G_f de M invariant par f qui s'écrit comme union disjointe :*

$$G_f = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$$

où chaque T est compact, transitif, stable au sens de Liapounoff et limite (pour la distance de Hausdorff) d'une suite de classes homoclines d'orbites périodiques.

Les résultats contenus dans la prépublication [6] permettent alors d'affirmer :

Corollaire 11 *Soit M une variété compacte de dimension au moins 3 munie d'une forme volume ω. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ de $\mathrm{Diff}_\omega(M)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{G}$, il existe un ensemble contenant un G_δ dense G_f de M invariant par f qui s'écrit comme union disjointe :*

$$G_f = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$$

où chaque T est compact, transitif, stable au sens de Liapounoff et si $T \in \mathcal{T}$:

- *soit T admet une décomposition dominée ;*
- *soit dans tout voisinage U de T (pour la topologie de Hausdorff) et pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de f, il existe dans U une orbite périodique $\mathcal{O}$ pour f et $g \in \mathcal{U}$ tel que $\mathcal{O}$ est aussi périodique pour g, avec tous ses multiplicateurs égaux à 1.*

2 Démonstration des théorèmes 1 et 2

Rappelons des notions détaillées dans [11] : étant donné un espace métrique compact X, l'ensemble de ses parties compactes non vides, noté $\mathcal{K}(X)$, muni de la distance de Hausdorff, est un espace métrique compact. Une fonction définie sur un espace topologique Y à valeurs dans $\mathcal{K}(X)$ est :

- semi-continue supérieurement si quel que soit U ouvert de X, $\{x \in Y; f(x) \subset U\}$ est un ouvert de Y ;
- semi-continue inférieurement si quel que soit U ouvert de X, $\{x \in Y; f(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est un ouvert de Y.

Bien entendu, f est continue sur Y si et seulement si elle y est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement. De plus, si f est semi-continue inférieurement sur Y, l'ensemble des points de continuité de f contient une intersection d'ouverts denses de Y. En particulier, si Y est un espace de Baire, l'ensemble des points de continuité de toute fonction semi-continue sur Y contient un G_δ dense. On considère alors l'application suivante :

Définition. Soit M une variété compacte. On appelle P l'application définie sur $\mathrm{Diff}^1(M)$, à valeurs dans $\mathcal{K}(\mathcal{K}(M))$, qui à tout $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ associe l'adhérence (dans $\mathcal{K}(M)$) de l'ensemble des orbites périodiques non dégénérées de f (une orbite périodique est non dégénérée si aucun de ses multiplicateurs de Floquet n'est égal à 1).

Du fait que si $\mathcal{O}$ est une orbite périodique non dégénérée de f, il existe pour tout g assez proche de f une orbite périodique non dégénérée proche de la première pour la distance de Hausdorff, on déduit :

Proposition 12 *Pour toute variété compacte M, l'application P est semi-continue inférieurement sur $\mathrm{Diff}^1(M)$. Il existe donc un G_δ dense $\mathcal{P}$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que tout point de $\mathcal{P}$ est un point de continuité de P.*

En ce qui concerne les orbites périodiques non dégénérées, le résultat suivant est bien connu :

"Il existe un G_δ dense $\mathcal{D}$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que si $f \in \mathcal{D}$, toutes les orbites périodiques de f sont non dégénérées".

Montrons alors :

Proposition 13 *Soit M une variété compacte et $f \in \mathcal{D}$. Soit $x \in M$. Alors :*

- *soit $\omega(x, f)$ est une orbite périodique ;*
- *soit l'ensemble des points non périodiques de $\omega(x, f)$ est dense dans $\omega(x, f)$.*

Remarquons que $\omega(x, f)$ peut être dénombrable : il suffit de considérer un cycle de connexions hétéroclines.

Démonstration de la proposition 13 : Commençons par remarquer :

Lemme 14 *Soit M une variété compacte, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $x \in M$. Alors si K_1 et K_2 sont deux parties compactes, invariantes et disjointes telles que $\omega(x, f) = K_1 \cup K_2$, forcément $K_1 = \emptyset$ ou $K_2 = \emptyset$.*

Démonstration du lemme 14 : Supposons que K_1 et K_2 soient deux telles parties et qu'elles soient non vides. Considérons alors deux voisinages ouverts U_1 et U_2 de K_1 et K_2 tels que : $(U_1 \cup f(U_1)) \cap U_2 = \emptyset$. Soit $N_0 \geq 1$. Comme $K_1 \subset \omega(x, f)$, il existe $N_1 \geq N_0$ tel que $f^{N_1}x \in U_1$. Comme $K_2 \subset \omega(x, f)$, il existe $N_2 \geq N_1$ tel que $f^{N_2}x \in U_2$. Soit alors $N_3 = \inf\{n \geq N_1, f^n x \notin U_1\}$. Alors, $f^{N_3}x \in f(U_1)$ donc $f^{N_3}x \notin U_2$. On en déduit :

$$\forall N_0 \geq 1, \exists N \geq N_0\,, f^N x \notin U_1 \cup U_2.$$

Ainsi, comme M est compacte, $\omega(x, f) \cap (M \backslash U_1 \cup U_2) \neq \emptyset$, ce qui contredit $\omega(x, f) = K_1 \cup K_2$. $\square$

Démontrons maintenant la proposition 13. Soit $f \in \mathcal{D}$. Remarquons qu'alors l'ensemble des points périodiques de f est au plus dénombrable (car f a alors un nombre fini de points périodiques de chaque période). Soit alors $x \in M$, supposons que $\omega(x, f)$ ne soit pas une orbite périodique.

Remarquons que si $y \in \omega(x, f)$ est périodique, c'est forcément un point d'accumulation de $\omega(x, f)$. Sinon, si $\mathcal{O}(y)$ désigne l'orbite de y, on aurait $\omega(x, f) = \mathcal{O}(y) \cup (\omega(x, f) \backslash \mathcal{O}(y))$, chacun de ces ensembles étant compact, invariant et non vide, ce qui contredit le lemme 14. Ainsi, si y est un point périodique de $\omega(x, f)$, $U_y = \omega(x, f) \backslash \{y\}$ est un ouvert dense de $\omega(x, f)$. L'intersection prise sur les y de $\omega(x, f)$ qui sont périodiques donne alors un G_δ dense de $\omega(x, f)$. $\square$

Nous allons maintenant pouvoir montrer le théorème 1 :

Démonstration du théorème 1 : Posons $\mathcal{G} = \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$; c'est un G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1(M)$. Considérons alors $f \in \mathcal{G}$. Soit $x \in M$. On souhaite montrer qu'il existe une suite $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'orbites périodiques de f qui converge pour la distance de Hausdorff vers $\omega(x, f)$. Il suffit pour cela de montrer que $\omega(x, f) \in P(f)$. Comme $f \in \mathcal{G}$, c'est un point de continuité de l'application P, et il suffit donc de montrer :

Proposition 15 *Sous les hypothèses précèdentes, pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de f dans* $\mathrm{Diff}^1(M)$ *et tout voisinage U de $\omega(x, f)$ dans $\mathcal{K}(M)$ (pour la topologie de Hausdorff), il existe $g \in \mathcal{U}$ qui admet une orbite périodique non dégénérée dans U.*

Démonstration de la proposition 15 : Remarquons déjà que si $\omega(x, f)$ est une orbite périodique, le résultat est évident en prenant tout simplement $g = f$ et $\omega(x, f)$ comme orbite périodique. On suppose donc que $\omega(x, f)$ n'est pas une orbite périodique, et on considère $\mathcal{U}$ et U comme dans l'énoncé. Par la proposition 13, l'ensemble des points non périodiques de $\omega(x, f)$ est dense dans $\omega(x, f)$. On peut donc trouver :

- W voisinage ouvert de $\omega(x, f)$ dans M ;
- $p_1, \dots, p_N$ points non périodiques de f appartenant à $\omega(x, f)$ et $V_1, \dots, V_N$ voisinages ouverts de $p_1, \dots, p_N$ inclus dans W tels que : toute partie compacte de M incluse dans W qui rencontre chaque V_i est un élément de U.

Chaque p_i étant un point non périodique de f, on peut lui appliquer le "connecting lemma", résultat annoncé par S. Hayashi (voir [10]), l'énoncé précis que nous utilisons étant le suivant, donné et démontré dans [3] :

Lemme 16 *Soit M une variété compacte, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $p_0 \in M$ un point non périodique de f. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de f en topologie C^1. Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que, pour tout V voisinage de p_0, il existe V' voisinage de p_0 inclus dans V vérifiant :*

si $(p, q) \in M^2$ sont tels que :

– *ni p, ni q n'est élément de* $\displaystyle\bigcup_{0\leq n\leq N-1} f^n(V)$ *;*

– *il existe n_p, n_q entiers plus grands que 1 tels que $f^{n_p}p \in V'$ et $f^{-n_q}q \in f^{N-1}V'$;*

alors il existe $g \in \mathcal{U}$ égal à f en dehors de $\displaystyle\bigcup_{0\leq n\leq N-1} f^n(V)$ *et tel que q est sur l'orbite positive de p sous g en transitant par V.*

On utilisera de plus le complément suivant du lemme 16 qui, bien que non énoncé formellement dans [3], y est démontré (dans la démonstration du lemme 16) :

Complément au lemme 16 : *Avec les mêmes notations que dans le lemme, l'orbite de g joignant p à q est constituée exclusivement :*

– *de points de* $\displaystyle\bigcup_{0\leq n\leq N-1} f^n(V)$ *;*

– *de points de $\{p, fp, \ldots, f^{n_p}p\}$;*

– *de points de $\{f^{-n_q}q, \ldots, f^{-1}q, q\}$.*

Ce complément n'est pas nouveau. Dans [10], S. Hayashi remarque que la construction effectuée dans le lemme 16 "accèlère" les deux bouts d'orbites considérés.

On applique alors le lemme 16 en $p_1, \ldots, p_N$ pour l'ouvert $\mathcal{U}$, ce qui nous donne des entiers $m_1, \ldots, m_N$. Soit $m = \max\{m_1, \ldots, m_N\}$: on a les conclusions du lemme 16 pour m en $p_1, \ldots, p_N$. Si pour un couple (i, j) il existe $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ tel que $f^k p_i = p_j$, on convient de retirer p_j de la liste des points considérés et de diminuer V_i de telle sorte que : $f^k V_i \subset V_j$. Finalement, on obtient un entier $m \geq 1$, des points $q_1, \ldots, q_N$ (avec un nouvel N) non périodiques de $\omega(x, f)$, des voisinages ouverts $V_1, \ldots, V_N$ de $q_1, \ldots, q_N$ qui vérifient :

(I) les éléments de $\{f^k V_i; 1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq m-1\}$ sont deux à deux disjoints et inclus dans W ;

(II) m vérifie les conclusions du lemme 16 en $q_1, \ldots, q_N$ pour $\mathcal{U}$; on associe à chaque V_i un $V_i' \subset V_i$ à l'aide de ce lemme ;

(III) toute partie compacte de M incluse dans W et qui rencontre chaque $f^j V_i$ où $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$ appartient à U ;

Supposons dans un premier temps que $N \geq 2$.

L'idée est maintenant la suivante : on va appliquer à un "bout" de l'orbite positive de x en un point q_i le lemme 16 et son complément, et fermer ce bout d'orbite. Ceci requiert un mode de sélection de q_i.

Commençons par choisir $n_0 \geq 0$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $f^n x \in W$. Choisissons alors $n_1, \ldots, n_N$ plus grands que n_0 tels que : $\forall j \in \{1, \ldots, N\}$, $f^{n_j} x \in V_j'$, puis posons : $n^* = \sup\{n_1, \ldots, n_N\} + 1$.

Par définition de $\omega(x,f)$, il existe pour chaque $p \geq n^*$ un $q > p$ tel que :

$$\forall j \in \{1,\dots,N\}, \exists r \in [p,q], f^r x \in V_j;$$

Choisissons un tel intervalle $[p,q]$ de longueur minimale ; alors, il existe $j_0 \in \{1,\dots,N\}$ tel que $f^p x \in V_{j_0}$. De plus, comme la longueur est minimale :

$$\forall r \in [p+1,q], f^r x \notin V_{j_0}.$$

On peut bien entendu supposer que $j_0 = 1$. On considère alors $r_1 \in [p,q]$ tel que $f^{r_1}x \in V_2$. On a alors : $f^{n_1}x = f^{-(r_1-n_1)}(f^{r_1}x) \in V_1'$ et comme $q_1 \in \omega(x,f)$, il existe $r_2 \geq 0$ tel que $f^{r_2}(f^{r_1}x) \in V_1'$. On peut alors appliquer le lemme 16 et son complément : il existe $g \in \mathcal{U}$, égal à f en dehors de $\bigcup_{0 \leq n \leq m-1} f^n(V_1)$ tel que l'orbite $\mathcal{O}$ de $f^{r_1}x$ sous g est périodique et transite par V_1. De plus, $\mathcal{O}$ est exclusivement constituée :

- de points de $\{f^{r_1}x, f^{r_1+1}x, \dots, f^{r_1+r_2}x\} \subset W$;
- de points de $\{f^{n_1}x, \dots, f^{r_1}x\} \subset W$;
- de points de $\bigcup_{0 \leq n \leq m-1} f^n(V_1) \subset W$.

Aussi, $\mathcal{O}$ est incluse dans W.

De plus, comme la perturbation $f^{-1} \circ g$ effectuée de f est à support dans $\bigcup_{0 \leq n \leq m-1} f^n(V_1)$, elle ne change pas le bout d'orbite $\{f^{p+m}x, \dots, f^q x\}$ de $f^{r_1}x$, donc $\mathcal{O}$ contient ce bout d'orbite. Or, cet ensemble rencontre $V_2, \dots, V_N$. Aussi, $\mathcal{O}$ rencontre chaque $f^j V_i$ pour $0 \leq j \leq m-1$ et $2 \leq i \leq N$. De plus, $\mathcal{O}$ transite par V_1, donc rencontre chaque $f^j V_1$ pour $0 \leq j \leq m-1$. Donc finalement, $\mathcal{O} \in U$. Faisant ensuite une petite perturbation de g, on peut ne pas changer l'orbite périodique $\mathcal{O}$ et la rendre non dégénérée, ce qu'on voulait.

Dans le cas où $N = 1$, quitte à diminuer V_1, on peut trouver $q' \in \omega(x,f) \setminus \bigcup_{k=-m}^{k=m} f^k(\bar{V_1})$, point qu'on rajoute artificiellement à la suite (i.e. $q_2 = q'$) ainsi qu'un voisinage V_2 de q' de sorte que le (I) soit vérifié. On définit alors n^*, $[p,q]$ et j_0 comme précédemment. Deux cas se présentent :

- soit $j_0 = 1$: la démonstration précédente est valable ;
- soit $j_0 = 2$. Dans ce cas, comme la longueur est minimale, on a : $f^q x \in V_1$; on considère alors le point $f^p x$, qui vérifie : $f^{n_1}x = f^{-(p-n_1)}(f^p(x)) \in V_1'$ et $q_1 \in \omega(x,f)$. Comme précédemment, on peut alors fermer l'orbite de $f^p x$ en faisant une perturbation à support dans $\bigcup_{1 \leq n \leq N-1} f^n(V_1)$, et cette orbite rencontre chaque $f^j V_1$ pour $0 \leq j \leq m-1$, d'où la conclusion.

$\square$

En ce qui concerne le théorème 2, tous les résultats énoncés et démontrés ici sont valables dans le cas conservatif, et donc le théorème 2 se démontre exactement comme le théorème 1.

Avant de passer aux démonstrations des autres résultats, j'aimerais faire la remarque suivante :

Remarque. On peut démontrer le théorème 1 et le théorème 2 sans utiliser le "connecting lemma" si on remplace "pour tout $x \in M$" par "pour tout $x \in M$ tel que $\omega(x, f)$ est transitif". Dans le cas conservatif, l'ensemble des tels x, qui contient l'ensemble des points récurrents, contient un G_δ dense de volume total. L'argument qui remplace le "connecting lemma" est alors une version raffinée du lemme de fermeture d'orbite que j'ai démontré dans [2] (voir aussi [1]). Dans [2], on définissait :
si $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $\varepsilon > 0$ et si U est voisinage de f dans $\mathrm{Diff}^1(M)$, alors $\Sigma(\varepsilon, U)$ est l'ensemble des $x \in M$ tel qu'il existe $g \in U$ et $y \in M$ vérifiant :

(i) y est un point périodique de g, de période notée m ;

(ii) $\forall i \in [0, m]$, $d(g^i y, f^i x) < \varepsilon$.

En d'autres termes, $\Sigma(\varepsilon, U)$ est l'ensemble des points en lesquels on peut perturber le difféomorphisme dans U (en topologie C^1 donc) de manière à transformer l'orbite de x en une orbite périodique ε-proche. Chaque $\Sigma(\varepsilon, U)$ est ouvert, donc l'ensemble $\Sigma(f) = \bigcap \Sigma(\varepsilon, U)$, qui s'écrit comme intersection dénombrable de tels ensembles (en utilisant une base dénombrable de voisinages de f et une suite (ε_n) tendant vers 0) est un G_δ de M.

Le lemme de fermeture d'orbite démontré dans [2] dit que $\Sigma(f)$ est un G_δ dense de l'ensemble $R(f)$ des points récurrents de f. (R. Mañé avait démontré de $\Sigma(f)$ est un ensemble de mesure totale pour toute probabilité invariante par f). En recopiant la démonstration donnée dans [2], on montre : "Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, soit T un compact non vide de M invariant par f tel que $f_{|T}$ soit transitif (ie. $\exists x \in T$, $T = \omega(x, f)$). Alors $\Sigma(f) \cap T$ est un G_δ dense de T" (en fait on montre de $\Sigma(f) \cap T$ est un G_δ-dense de $R(f) \cap T$, qui est un G_δ-dense de T).

On prend alors $x \in T \cap \Sigma(f)$ tel que $\omega(x, f) = T$ (un tel point existe car $\{y \in T, \omega(y, f) = T\}$ est un G_δ dense de T), et on ferme par perturbation de f un "long" morceau de son orbite : cela permet d'approximer T (pour la topologie de Hausdorff) par cette orbite périodique (que l'on peut supposer non dégénérée) et donne un analogue de la proposition 15, dont on déduit le résultat cherché comme dans la démonstration précédente du théorème 1.

3 Démonstration des théorèmes 3 et 5 et de la proposition 4

Démonstration du théorème 3 : Nous avons trouvé en théorème 1 un premier G_δ de $\mathrm{Diff}^1(M)$, que nous noterons ici $\mathcal{G}_0$. Nous appellerons $\mathcal{H}$ le G_δ des éléments de $\mathrm{Diff}^1(M)$ dont tous les points périodiques sont hyperboliques. De plus, on peut considérer l'application $\mathcal{A} : \mathrm{Diff}^1(M) \to \mathcal{K}(\mathcal{K}(M))$ qui a un difféomorphisme f associe l'adhérence (pour la topologie de Hausdorff) de ses orbites hyperboliques attractives ou répulsives. Une telle orbite persistant par perturbation C^1, l'application $\mathcal{A}$ est semi-continue inférieurement et donc l'ensemble de ses points de continuité, $\mathcal{G}_1$, est un G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1(M)$. On pose alors : $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{G}_1$, et on considère $f \in \mathcal{G}$ et $x \in M$. Supposons alors que $\omega(x, f)$ n'ait pas de décomposition dominée. Un résultat classique nous dit que si $K \subset M$ est une partie invariante par f sur laquelle f admet une décomposition dominée, alors f admet une décomposition dominée sur $\overline{K}$. On en déduit que si $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'orbites périodiques (donnée par le théorème 1) de f qui converge (pour la distance de Hausdorff) vers $\omega(x, f)$, alors pour tout $N \geq 0$: f n'a pas de décomposition dominée sur $\bigcup_{n\geq N} \mathcal{O}_n$.

Supposons alors que que $\omega(x, f)$ n'est pas limite (pour la topologie de Hausdorff) d'une suite d'orbites périodiques attractives ou répulsives de f. Alors, comme f est un point de continuité de $\mathcal{A}$:
$(*)$ "il existe U voisinage de $\omega(x, f)$ dans $\mathcal{K}(M)$ et $\mathcal{U}$ voisinage de f dans $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que si $g \in \mathcal{U}$, g n'a pas d'orbite périodique attractive ou répulsive dans U".

Nous allons voir que ceci n'est pas possible. Choisissons à cet effet $N \geq 0$ tel que : $\forall n \geq N$, $\mathcal{O}_n \in U$.

On sait qu'il n'existe pas de décomposition dominée pour f sur $\bigcup_{n\geq N} \mathcal{O}_n$; de plus comme $f \in \mathcal{H}$ et par définition de U, les $\mathcal{O}_n$ sont toutes des orbites périodiques hyperboliques selles. On note en chaque $p \in K = \bigcup_{n\geq N} \mathcal{O}_n$ E^s_p l'espace tangent à la variété stable de p, E^u_p l'espace tangent à la variété instable de p (ils sont tous deux de dimension 1) ; d'autre part, on notera $\tau(p)$ la période de p pour f. On sait que la décomposition $E^s \oplus E^u$ n'est pas dominée. Deux cas peuvent se présenter :

- soit l'angle entre E^s et E^u n'est pas minoré sur K par une constante non nulle ; alors, pour tout $\alpha > 0$ il existe $p \in K$ tel que :

$$\angle(E^s_p, E^u_p) < \alpha;$$

- soit cet angle est minoré sur K par une constante α strictement positive.

Premier cas : On suppose donc que pour tout $\alpha > 0$ il existe $p \in K$ tel que :

$$\angle(E_p^s, E_p^u) < \alpha.$$

On utilise alors le lemme algébrique suivant :

Lemme 17 *Soit $M \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ ayant deux espaces propres différents d'angle inférieur à α ; alors il existe $s \in [-1, 1]$ tel que la matrice $\begin{bmatrix} \cos s\alpha & -\sin s\alpha \\ \sin s\alpha & \cos s\alpha \end{bmatrix} \cdot M$ a ses valeurs propres de même module.*

Ce lemme élementaire est énoncé dans la prépublication [6] dans le cas où $M \in GL_+(2, \mathbf{R})$. Démontrons-le dans le cas nous intéressant.

Démonstration du lemme 17 : On suppose que M a deux valeurs propres de modules différents (sinon le lemme est démontré) ; on note E_1 et E_2 les deux espaces propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 (avec $|\lambda_1| < |\lambda_2|$). On peut, quitte à conjuguer par une matrice orthogonale, supposer que : $M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. La condition $\angle(E_1, E_2) < \alpha$ s'écrit alors : $0 < \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{|\mu|} < \tan \alpha$. On a alors :

$$M_s = \begin{bmatrix} \cos s\alpha & -\sin s\alpha \\ \sin s\alpha & \cos s\alpha \end{bmatrix} \cdot M = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cos s\alpha & \mu \cos s\alpha - \lambda_2 \sin s\alpha \\ \lambda_1 \sin s\alpha & \mu \sin s\alpha + \lambda_2 \cos s\alpha \end{bmatrix}.$$

Deux cas se présentent alors :

- soit $\lambda_1 . \lambda_2 > 0$; on peut alors choisir $s \in [-1, 1]$ tel que $\tan s\alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\mu}$; on a alors :
$$(\mathrm{Trace} M_s)^2 - 4 \det M_s = 4|\lambda_1|(|\lambda_1| \cos^2 s\alpha - |\lambda_2|) < 0$$
donc les valeurs propres ne sont pas réelles, donc conjugués, donc de même module ;
- soit $\lambda_1 . \lambda_2 < 0$. Alors on a : $0 < \left| \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} \right| < \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\mu} \right| < \tan \alpha$, donc il existe $s \in [-1, 1]$ tel que $\tan s\alpha = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu}$. On calcule alors : $\mathrm{Trace} M_s = 0$ donc les deux valeurs propres de M_s sont opposées l'une de l'autre.

$\square$

Ce lemme permet, si on se place en coordonnées, de trouver une matrice R proche de celle de l'identité telle que :

"$R \cdot Df^{\tau(p)}(p)$ a deux valeurs propres de même module."

Ainsi, quitte à modifier Df le long de l'orbite de p, on trouve $g \in \mathcal{U}$ qui a une orbite périodique attractive ou répulsive dans U, ce qui était impossible.

Deuxième cas : on suppose que l'angle entre E^s et E^u est minoré par un $\alpha > 0$. On va alors montrer qu'on peut faire des perturbations de f aussi petite qu'on le veut (en topologie C^1) de façon à trouver $\angle(E_1, E_2) < \alpha$; on se sera alors ramené au premier cas .

On procède alors exactement comme dans la prépublication [6], section 3. Comme celle-ci n'est pas encore publiée, nous donnons ici l'argument.
Décrivons précisément la situation envisagée : en chaque $p \in K$, en se plaçant en coordonnées (on recouvre K par un nombre fini de domaines de cartes telles que les applications définissant ces cartes sont bornés ainsi que leurs applications réciproques en topologie C^1), on note $M(p)$ la matrice de $Df(p)$, et si τ est la période de p : $M_1(p) = M(p)$; $M_2(p) = M(f(p)), \ldots, M_{\tau-1}(p) = M(f^{\tau-1}p)$. On obtient alors une famille $(\mathcal{M}(n))_{n\in\mathbf{N}}$ (n sert à numéroter les orbites périodiques) telle que pour chaque n, $\mathcal{M}(n) = (M_1(n), \ldots, M_{\tau(n)}(n))$ est un $\tau(n)$-uplet de matrices 2×2 qui vérifient :

1) il existe B tel que chaque $\|M_k(n)\|$ et chaque $\|M_k(n)^{-1}\|$ est majorée par B ;
2) chaque $P(n) = M_{\tau(n)}(n) \times \cdots \times M_n(1)$ a deux valeurs propres de modules différents $\lambda_1(n)$ et $\lambda_2(n)$ avec $|\lambda_1(n)| > 1 > |\lambda_2(n)|$;
3) si $E_1(n)$ et $E_2(n)$ sont les sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda_1(n)$ et $\lambda_2(n)$ de $P(n)$, alors pour chaque $k \in \{0, \ldots, \tau\}$, $\angle(M_k(n) \times \cdots \times M_1(n)(E_1(n)), M_k(n) \times \cdots \times M_1(n)(E_2(n))) > \alpha$. On convient de poser $E_i(n,k) = M_k(n) \times \cdots \times M_1(n)(E_i(n))$.
4) la décomposition $E_2(n,k) \oplus E_1(n,k)$ n'est pas dominée.

Alors, quitte à conjuguer les $M_k(n)$ par des matrices $Q_{n,k}$ de normes ainsi que la norme de leurs inverses uniformément majorées, on peut supposer que l'angle $\angle(E_1(n,k), E_2(n,k)) = \frac{\pi}{2}$ et $M_i(n) = \begin{bmatrix} a_i(n) & 0 \\ 0 & b_i(n) \end{bmatrix}$. On a donc pour chaque n : $\lambda_1(n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{\tau(n)} a_i(n)$ et $\lambda_2(n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{\tau(n)} b_i(n)$.
Remarquons qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que : $\forall n \in \mathbf{N}, |\lambda_1(n)| \geq \lambda^{-\tau(n)}$ et $|\lambda_2(n)| \leq \lambda^{\tau(n)}$ (sinon en remplaçant $a_i(n)$ par $\mu a_i(n)$ ou $b_i(n)$ par $\frac{b_i(n)}{\mu}$ on obtient pour $P(n)$ une matrice dont les deux valeurs propres ont leurs modules situés d'un même côté de 1, donc un attracteur ou un répulseur).

De plus, comme les orbites sont hyperboliques : $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(n) = +\infty$ (il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de périodes donnés). Enfin, comme la décomposition n'est pas dominée, pour chaque $N \geq 1$, il existe $n = n(N) \in \mathbf{N}$ et $K = K(N) \geq N$ tels que (on prolonge de manière périodique la famille de matrices $(M_i(n))_i$) :

$$\frac{1}{2}\left|\prod_{i=1}^{K} a_i(n)\right| \leq \left|\prod_{i=1}^{K} b_i(n)\right|.$$

Effectuant la division euclidienne de $K(n)$ par $\tau(n)$, on peut écrire : $K(N) = q(N)\tau(n) + k(N)$. On obtient alors :

$$\frac{1}{2}\left(\lambda^{-2\tau(n)}\right)^{q(N)} \prod_{i=1}^{k(N)} |a_i(n)| \leq \prod_{i=1}^{k(N)} |b_i(n)|.$$

Si $k(N)$ a une sous-suite bornée, comme $K(N) = q(N)\tau(n) + k(N)$, la sous-suite correspondante pour q ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et donc dans l'inégalité précédente le terme de gauche tend vers $+\infty$ alors que le terme de droite est borné, ce qui est impossible. Donc finalement la suite $(k(N))_{N\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.
En prenant $\mu \in]\lambda, 1[$ assez proche de 1, on peut perturber f de telle sorte qu'on remplace tous les $a_i(n)$ par $\tilde{a}_i(n) = \mu.a_i(n)$ et tous les $b_i(n)$ par $\tilde{b}_i(n) = \frac{b_i(n)}{\mu}$, ce qui donne des matrices $\tilde{M}_i(n)$ et $\tilde{P}(n)$. Remarquons qu'alors :

$$\prod_{i=1}^{k(N)} |\tilde{a}_i(n)| = \mu^{k(N)} \prod_{i=1}^{k(N)} |a_i(n)| \leq 2\mu^{k(N)} \prod_{i=1}^{k(N)} |b_i(n)| = 2\mu^{2k(N)} \prod_{i=1}^{k(N)} |\tilde{b}_i(n)|$$

On perturbe une dernière fois en remplaçant $\tilde{M}_{k(n)}(n)$ par $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_{k(n)}(n)$, et on obtient comme nouvelle matrice (on ne change pas la notation) :

$$\tilde{P}(n) = \begin{bmatrix} \dfrac{\tilde{\lambda}_1(n)}{\prod_{i=1}^{k(N)} \tilde{a}_i(n)} & 0 \\ 0 & \dfrac{\tilde{\lambda}_2(n)}{\prod_{i=1}^{k(N)} \tilde{b}_i(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{k(N)} \tilde{a}_i(n) & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^{k(N)} \tilde{b}_i(n) \end{bmatrix}$$

donc

$$\tilde{P}(n) = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1(n) & t\tilde{\lambda}_1(n) \dfrac{\prod_{i=1}^{k(N)} \tilde{b}_i(n)}{\prod_{i=1}^{k(N)} \tilde{a}_i(n)} \\ 0 & \tilde{\lambda}_2(n) \end{bmatrix}.$$

Si β désigne l'angle entre les deux sous-espaces propres de cette matrice, on a :

$$\tan\beta = \frac{(\tilde{\lambda}_2(n) - \tilde{\lambda}_1(n)) \prod_{i=1}^{k(N)} \tilde{a}_i(n)}{t\tilde{\lambda}_1(n) \prod_{i=1}^{k(N)} \tilde{b}_i(n)}.$$

Or, comme on a pris soin de choisir $\mu \in]\lambda, 1[$, on a : $|\tilde{\lambda}_2(n)| \leq |\tilde{\lambda}_1(n)]$ et donc : $\dfrac{|\tilde{\lambda}_2(n) - \tilde{\lambda}_1(n)|}{|\tilde{\lambda}_1(n)|} \leq 2$. On obtient donc finalement : $|\tan\beta| \leq \dfrac{2\mu^{2k(N)}}{|t|}$. Pour t fixé (petit pour que la perturbation soit petite), on peut choisir N assez grand pour que $k(N)$ soit grand, et donc $\tan(\beta)$ soit petit, ce qui nous ramène au cas précédent. $\square$

Démonstration de la proposition 4 : Ici, on reprend pour $\mathcal{G}$ le même G_δ que dans la démonstration du théorème 3. On suppose que $f \in \mathcal{G}$, $x \in M$ et que f admet une décomposition dominée sur $\omega(x, f)$ mais que celle-ci n'est pas hyperbolique. On note $E \oplus F$ cette décomposition dominée. On reprend la démonstration donnée par R. Mañé dans [12], dans un cas assez simple puisque $\dim E = \dim F = 1$. Supposons que la conclusion de la proposition 4 soit fausse : il existe alors U voisinage de $\omega(x, f)$ dans M et $\mathcal{U}$ voisinage de f dans $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que si $g \in \mathcal{U}$, g n'a aucune orbite périodique hyperbolique attractive ou répulsive dans U. Aussi, il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que : pour tout $g \in \mathcal{U}$, pour tout $y \in U$ périodique pour g (de période notée τ), on a :

$$\begin{aligned} \|Dg^{\tau}(y)_{|E^s}\| &< \lambda^{\tau} \\ \|Dg^{-\tau}(y)_{|E^u}\| &< \lambda^{\tau} \end{aligned}$$

(sinon, si λ doit s'approcher de 1, on perturbe Dg le long de l'orbite en $\frac{1}{\lambda}Dg$ (ou λDg) et on obtient un multiplicateur de Floquet de module 1, donc en reperturbant un attracteur ou un répulseur).

Remarquons alors (comme R. Mañé) que si :

$$\forall y \in \omega(x, f), \lim_{n\to+\infty} \|Df^n(y)_{|E}\| = \lim_{n\to+\infty} \|Df^{-n}(y)_{|F}\| = 0\,,$$

alors $E \oplus F$ est hyperbolique. Aussi, il existe $y \in \omega(x, f)$ et une suite $(j_n)_{n\in\mathbf{N}}$ strictement croissante d'entiers naturels telle que par exemple :

$$(I) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{j_n} \log \|Df^{j_n}(y)_{|E}\| \geq 0$$

Si δ_z désigne la mesure de Dirac en z, on peut supposer la convergence faible de la suite de probabilités $\left(\dfrac{1}{j_n} \sum_{k=0}^{j_n - 1} \delta_{f^k(y)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ vers μ, qui est alors automatiquement invariante par f. L'inégalité (I) implique alors que :

$$\int_{\omega(x,f)} \log \|Df(p)_{|E}\| d\mu(p) \geq 0$$

(remarquons qu'une décomposition dominée est toujours continue donc $\log \|Df_{|E}\|$ est continue).

Le théorème de Birkhoff implique alors que :

$$\int_{\omega(x,f)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \|Df(f^k p)_{|E}\| d\mu(p) \geq 0.$$

Or, si $\Sigma(f)$ désigne comme dans la remarque qui suivait la démonstration du théorème 1 l'ensemble des points dont on peut refermer l'orbite en approximant un bout de l'orbite, on sait que : $\mu(\Sigma(f) \cap \omega(x, f)) = 1$: c'est le “ergodic closing lemma”. Aussi il existe $y \in \Sigma(f) \cap \omega(x, f)$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \|Df(f^k y)_{|E}\| \geq 0.$$

On choisit alors $\lambda_0 \in]\lambda, 1[$ et $N \geq 0$ tel que :

$$\forall n \geq N, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \|Df(f^k y)_{|E}\| \geq \log \lambda_0.$$

Supposons que y soit périodique ; alors, nécessairement, $E_y = E^s_y$ (on a unicité de la décomposition dominée si on connait sa dimension), et évidemment :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \|Df(f^k y)_{|E}\| < 0.$$

Donc y n'est pas périodique. Aussi en utilisant le fait que $y \in \Sigma(f)$ pour refermer son orbite, on obtiendra des orbites périodiques de périodes de plus en plus longues. On trouve alors $g \in \mathcal{U}$ tel que g a une orbite périodique dans U de période $m \geq N$, tel que $g^m y = y$ et :

$$\forall k \in \{0, \dots, m\}, \|Dg(g^k y)_{|E}\| > \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_0}} \|Df(f^k y)_{|E}\|$$

(ceci vient du fait que l'orbite de y sous g peut être choisie aussi proche qu'on le veut de l'orbite de y sous f car $y \in \Sigma(f)$ et du fait que g peut être choisi aussi C^1-proche de f qu'on le veut).

Alors :

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\log\|Dg(g^k y)_{|E}\| \geq \frac{1}{2}(\log\lambda_0 + \log\lambda)$$

donc (rappelons que E est de dimension 1 donc toutes ses applications linéaires sont des similitudes ; or, la norme d'un produit de similitudes et le produit de leurs normes) :

$$\prod_{k=0}^{m-1}\|Dg(g^k y)_{|E}\| = \|Dg^m(y)_{|E}\| \geq \left(\sqrt{\lambda_0\cdot\lambda}\right)^m > \lambda^m$$

ce qui contredit la définition de λ. ∎

Remarque. Dans le cas où $f \in \mathcal{G}$ et $\omega(x,f)$ est non hyperbolique et admet une décomposition dominée, on trouve des orbites périodiques qui approchent un ensemble contenant le support d'une mesure invariante, mais la méthode "ergodique", ne permet pas d'approcher $\omega(x,f)$ tout entier.

Démonstration du théorème 5 : Nommons $\mathcal{H}$ l'ensemble des difféomorphismes symplectiques de classe C^1 dont les multiplicateurs de Floquet en chaque orbite périodique sont simples, et $\mathcal{G}_1$ l'ensemble des points de continuité de l'application $\mathcal{A} : \mathrm{Diff}^1_\omega(M) \to \mathcal{K}(\mathcal{K}(M))$ qui à f associe l'adhérence dans $\mathcal{K}(M)$ de l'ensemble de ses orbites périodiques complètement elliptiques, $\mathcal{A}$ étant semi-continue inférieurement, l'ensemble $\mathcal{G}_1$ est un G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$. Soit de plus $\mathcal{G}_2$ l'ensemble des éléments f de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ tels que pour tout p périodique hyperbolique pour f, la classe homocline de p contient $W^s(p,f) \cup W^u(p,f)$ (i.e. l'ensemble des intersections homoclines est dense dans la variété stable et la variété instable de p). Alors un résultat de Z. Xia (cf [18]) implique que $\mathcal{G}_2$ contient un G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$. Rappelons aussi le résultat suivant de S. Newhouse (voir [15]) : "il existe un G_δ dense $\mathcal{G}_3$ de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ tel que si $f \in \mathcal{G}_3$:

– soit f est Anosov ;

– soit l'ensemble des points périodiques elliptiques de f est dense dans M"

où :

Définition. Soit $f \in \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$, p un point périodique de f de période τ. On dit que p est elliptique si les valeurs propres de $Df^\tau(p)$ sont simples et l'une de ces valeurs propres est de module 1.

On pose alors $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 \cap \mathcal{H}$ et on considère $f \in \mathcal{G}$ et $x \in M$. Supposons que $\omega(x,f)$ ne soit pas hyperbolique. Alors f n'est pas Anosov et comme $f \in \mathcal{G}_3$, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points périodiques elliptiques de f est dense dans M. Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}(M)$ l'ensemble des orbites des éléments de $\mathcal{E}$. Alors, comme $\mathcal{E}$ est dense dans M, il existe une suite de points de $\mathcal{E}$ qui converge vers x, donc la suite des orbites de ces points converge dans $\mathcal{K}(M)$ vers K qui contient $\omega(x, f)$. Si cette suite a une infinité de termes qui sont complètement elliptiques, on a le résultat cherché. Sinon, on peut s'arranger pour que chaque orbite de cette suite ait :

– deux multiplicateurs de Floquet de module 1 ;
– un multiplicateur de Floquet de module strictement plus grande que 1 ;
– un multiplicateur de Floquet de module strictement plus petit que 1.

On note $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cette suite. Supposons alors que f ne soit pas partiellement hyperbolique sur $\omega(x, f)$ et que la conclusion du théorème 5 soit fausse : $\omega(x, f)$ n'est pas inclus dans la limite d'une suite d'orbites périodiques complètement elliptiques. Comme $f \in \mathcal{G}_1$, $\mathcal{A}$ est continue en f et donc il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f dans $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$, un voisinage U de $\omega(x, f)$ dans $\mathcal{K}(M)$ tel que : pour tout $g \in \mathcal{U}$, il n'existe pas d'orbite périodique complètement elliptique $\mathcal{O}$ de g dont une partie $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ vérifie : $\mathcal{O}' \in U$. Or, par construction de $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, il existe $\mathcal{O}'_n \subset \mathcal{O}_n$ telle que $\mathcal{O}'_n \in U$. De plus, si on applique la méthode mise en place dans [4] à la suite d'orbite périodique $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on constate que :

– f n'est pas partiellement hyperbolique sur $\bigcup_{n\geq N} \mathcal{O}_n$, sinon elle le serait sur $\overline{\bigcup_{n\geq N} \mathcal{O}_n}$, donc sur $\omega(x, f)$;
– aussi on peut trouver $g \in \mathcal{U}$ ayant une orbite périodique complètement elliptique proche pour la distance de Hausdorff d'une $\mathcal{O}_n$ où $n \geq N$ (ici on évite de recopier la démonstration contenue dans [4] ; le seul changement par rapport à ce qui avait été fait dans [4] est qu'au lieu de considérer toutes les orbites périodiques elliptiques, on ne considère que les éléments de $\{\mathcal{O}_n; n \geq N\}$; de plus, on utilise le fait que les orbites complètement elliptiques construites dans [4] étaient proches des orbites elliptiques initiales (pour la distance de Hausdorff), même si la période pouvait être "multipliée"). $\square$

4 Démonstration des résultats concernant les A.S.F.

Démonstration du théorème 6 : Soit $\mathcal{G}_0$ le G_δ dense construit en proposition 4. Le "closing lemma" nous dit qu'il existe un G_δ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que si $f \in \mathcal{G}_1$, l'ensemble des points périodiques de f est dense dans l'ensemble non errant $\Omega(f)$ de f. De plus, les résultats contenus dans [3] nous disent qu'il existe un G_δ dense $\mathcal{G}_2$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que si $f \in \mathcal{G}_2$, si p est un point périodique hyperbolique de f, si $q \in M$ vérifie : pour tous voisinages V_p et V_q de p et q respectivement, $\bigcup_{n\geq 1} f^n V_p \cap V_q \neq \emptyset$ alors $q \in \overline{W^u(\mathcal{O}(p), f)}$, la même propriété étant vraie pour f^{-1} (i.e. une propriété concernant les variétés stables des points périodiques de f). Il est aussi démontré dans [3] qu'il existe un G_δ dense $\mathcal{G}_3$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que si $f \in \mathcal{G}_3$, si p et q sont deux points périodiques hyperboliques de f tels que $\dim W^u(p,f) \geq \dim W^u(q,f)$, alors $W^u(\mathcal{O}(p,f),f) \cap W^s(\mathcal{O}(q,f),f)$ est dense dans $\overline{W^u(\mathcal{O}(p,f),f)} \cap \overline{W^s(\mathcal{O}(q,f),f)}$. On pose $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 \cap \mathcal{H}$.

On considère alors $f \in \mathcal{G}$, et $A = \omega(x,f)$ un A.S.F. de f. Comme A est positivement stable au sens de Liapounoff, si c'est une orbite périodique, c'est une orbite périodique attractive et on a la conclusion du théorème ; on suppose donc que A n'est pas une orbite périodique. On sait par la proposition 4 que soit A est hyperbolique, soit il contient une limite d'orbites périodiques répulsives et attractives. Supposons que A soit hyperbolique. Si la dimension de sa variété stable (ou instable) est 2, il est assez facile de voir que A est une seule orbite périodique et donc on est dans le cas précédent. Chaque point $y \in A$ admet donc une variété stable $W^s(y,f)$ et une variété instable, $W^u(y,f)$ de dimension 1. Comme A est positivement stable au sens de Liapounoff on a :

$$\forall y \in A, W^u(y,f) \subset A.$$

Aussi, A admet une structure de produit local (voir [17] pour toutes les notions reliées à l'hyperbolicité). Or A, compact invariant, contient au moins un point non errant donc par le lemme du pistage un point périodique p. Comme $A = \omega(x,f)$, on a pour tout$(y,z) \in A^2$, pour tous V_y voisinage de y, V_z voisinage de z :

$$\bigcup_{n \geq 1} f^n V_y \cap V_z \neq \emptyset.$$

Ceci et le fait que $f \in \mathcal{G}_2$ impliquent que :

$$A \subset \overline{W^s(\mathcal{O}(p),f)} \cap \overline{W^u(\mathcal{O}(p),f)}$$

donc comme $f \in \mathcal{G}_3$:

$$A \subset \overline{W^s(\mathcal{O}(p),f) \cap W^u(\mathcal{O}(p),f)} = H(p,f).$$

Comme $H(p,f)$ classe homocline de p est telle que $f_{|H(p,f)}$ est transitif, et comme A est positivement stable au sens de Liapounoff :

$$H(p,f) \subset A.$$

Donc $A = H(p,f)$ est bien une classe homocline hyperbolique. Comme A est muni d'une structure de produit local, on sait qu'il existe un voisinage U de A dans M tel que :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(U);$$

comme A est positivement stable au sens de Liapounoff, on peut quitte à réduire U s'arranger pour que $f(U) \subset U$, et donc finalement :

$$A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U) \text{est un vrai attracteur hyperbolique.} \qquad \square$$

Le corollaire 7 est évident.

Démonstration du théorème 8 : Appelons $\mathcal{G}_0$ le G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ trouvé en théorème 5. Soit alors $f \in \mathcal{G}_0$ et A un A.S.F. de f. Comme A est stable au sens de Liapounoff, on a $x \in A = \omega(x, f)$ donc $f_{|A}$ est transitif. Supposons que A soit hyperbolique. Comme A est stable au sens de Liapounoff, on a :

$$\forall y \in A, W^s(y, f) \cup W^u(y, f) \subset A$$

A a donc une structure de produit local et donc il existe U voisinage de A tel que :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(U).$$

D'un autre côté, A est stable au sens de Liapounoff donc on peut s'arranger pour que U soit invariant. Aussi : $A = U$, $A = M$. f est donc Anosov et comme $A = M$ est un ensemble ω-limite, f est transitif. Supposons alors que l'on soit dans le cas (iii) du théorème 5. Alors il existe une suite d'orbites périodiques complètement elliptiques de f qui tend (pour le distance de Hausdorff) vers $K \supset A$. Mais comme A est stable au sens de Liapounoff, forcément $A = K$. $\square$

Démonstration du théorème 9 : Nommons $\mathcal{G}_0$ le de G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ trouvé à l'aide du théorème 2. Le résultat de Z. Xia démontré dans [18] nous dit qu'il existe un G_δ dense $\mathcal{G}_1$ de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{G}_1$, pour tout p point périodique de f, si $H(\mathcal{O}(p), f) = H$ désigne la classe homocline de l'obite de p, on a :

$$H(\mathcal{O}(p), f) = \overline{W^u(\mathcal{O}(p), f)} = \overline{W^s(\mathcal{O}(p), f)}.$$

En particulier, si $f \in \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$, la classe homocline de tout point périodique de f est non triviale.

Soit alors $f \in \mathcal{G}$ et A un A.S.F. de f. Par le théorème 2, A est limite d'orbites périodiques de f, considérons les classes homoclines de ces orbites périodiques. Alors, comme A est stable au sens de Liapounoff, elles aussi tendent vers A. $\square$

Démonstration du corollaire 10 : Appelons $\mathcal{G}_0$ le G_δ de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ trouvé à l'aide du théorème 9, $\mathcal{G}_1$ celui trouvé à l'aide du résultat de C. Morales et M.-J. Pacifico, et considérons $f \in \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$. Alors le résultat de C. Morales et M.-J. Pacifico permet de lui associer un G_δ dense G'_f de M. De plus $R(f)$, ensemble des points récurrents de f, est aussi un G_δ dense de M. On pose : $G_f = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} f^n(G'_f) \cap R(f)$. Soit alors $x \in G_f$. Alors $x \in \omega(x,f)$. Posons : $\mathcal{T} = \{\omega(x,f); x \in G_f\}$. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont des compacts non vides transitifs, stables au sens de Liapounoff et limite de classes homoclines d'orbites périodiques. Il faut juste vérifier qu'on obtient une partition de G_f. Supposons donc que x et y soient deux éléments de G_f et que $z \in \omega(x,f) \cap \omega(y,f)$. Alors, comme $\omega(y,f)$ est stable au sens de Liapounoff : $\omega(x,f) \subset \omega(y,f)$. Donc $\omega(x,f) = \omega(y,f)$. $\square$

Démonstration du corollaire 11 : En fait c'est un simple corollaire du corollaire 10 et du résultat concernant les classes homoclines des difféomorphismes préservant de volume démontrés par C. Bonatti, L. Diaz et E. Pujals dans la prépublication [6]. $\square$

Références

[1] M.-C. Arnaud, *Le "closing lemma" en topologie C^1*, Mem. Soc. Math. Fr, Nouv. Serie **74** (1998).

[2] M.-C. Arnaud, *Un lemme de fermeture d'orbites : le "orbit closing lemma"*, C.R.A.S., Ser. I, **323**, (1996), 1175-1178.

[3] M.-C. Arnaud, *Création de connexions en topologie C^1*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **21**, (2001), 1-43.

[4] M.-C. Arnaud, *The generic symplectic C^1-diffeomorphisms of 4-dimensional symplectic manifolds are hyperbolic, partially hyperbolic or have a completely periodic point*, à paraître à Ergod. Th. & Dynam. Sys.

[5] M.-C. Arnaud, *Création de points périodiques de tous types au voisinage des tores $K.A.M$*, Bull. Soc. Math. France **123** (1995), 591-603.

[6] C. Bonatti, L. Diaz and E. Pujals, *A C^1-generic dichotomy for diffeomorphisms : weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources* preprint.

[7] C. Bonatti, L. Diaz, *Connexions hétéroclines et généricité d'une infinité de puits et de sources*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **32** (1999), 135-150.

[8] M.I. Brin, S.A. Pesin, *Partially hyperbolic dynamical systems*, Math. USSR Izvestija **8** (1974), 177-218.

[9] S. Hayashi, *Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1-stability and Ω-stability conjectures for flows*, Ann. Math. **145** (1997), 81-137.

[10] S. Hayashi, *Hyperbolicity, stability and the creation of homoclinic points*, Documenta Mathematica, Extra Vol. ICM 1998 II (1998), 789-796.

[11] C. Kuratowski, Topologie, Ed. Jacques Gabay (1992).

[12] R. Mañé, *An ergodic closing lemma*, Ann. Math. **116** (1982), 503-540.

[13] C.A. Morales & M.-J. Pacifico, *Lyapunov stability of generic ω-limit sets*, preprint.

[14] S. Newhouse, *Diffeomorphisms with infinitely many sinks*, Topology **12** (1974), 9-18.

[15] S. Newhouse, *Quasi-elliptic points in conservative dynamical systems*, Amer. J. Math. **99** (1977), 1081-1087.

[16] C. Pugh & C. Robinson, *The C^1 closing lemma, including Hamiltonians*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **3** (1983), 261-314.

[17] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Asterisque **56** (1978).

[18] Z. Xia, *Homoclinic points in symplectic and volume preserving diffeomorphisms*, Comm. in Math. Phys. **117** (1996), 435-449.