



ACADEMIE D'AIX-MARSEILLE
UNIVERSITE D'AVIGNON ET DES PAYS DE VAUCLUSE

THESE

présentée pour obtenir le grade de Docteur en Sciences
de l'Université d'Avignon et des pays de Vaucluse

SPECIALITE : Mathématiques

**Sur les courbes invariantes par un difféomorphisme
 C^1 -générique symplectique d'une surface**

par Marie Girard

soutenue le 18 décembre 2009 devant un jury composé de

M. Patrice Le Calvez	Professeur à l'Université de Paris VII	Président du jury
M. Christian Bonatti	Directeur de recherches à l'Université de Bourgogne	Rapporteur
M. Thierry Barbot	Professeur à l'Université d'Avignon	Examineurs
M. Sylvain Crovisier	Chargé de recherche à l'Université de Paris XIII	
Mme. Marie-Claude Arnaud	Professeur à l'Université d'Avignon	Directrice de thèse

Ecole doctorale Informatique, Structures, Systèmes N° 166
Laboratoire d'Analyse non linéaire et de Géométrie EA 2151

Remerciements

En premier lieu, je remercie Marie-Claude Arnaud d'avoir accepté de m'encadrer. Durant ces quatre années, elle a su me faire et me redonner confiance lorsque cette thèse semblait si mal s'engager. Je reconnais ne pas avoir toujours su profiter pleinement de sa disponibilité et de ses conseils qui n'ont jamais fait défaut.

Je remercie Patrice le Calvez et Christian Bonatti d'avoir consacré de leur temps précieux pour rapporter ce manuscrit. Leurs remarques pertinentes et précises ont largement contribué à améliorer la précision du texte. Je remercie aussi Sylvain Crovisier et Thierry Barbot qui me font l'honneur de participer au jury.

Je remercie toutes les personnes qui se sont trouvées sur ma route tout au long de ma découverte et de mon apprentissage des mathématiques et que je ne saurais énumérer. J'ai tout de même une pensée particulière pour Françoise Jacob qui a été mon professeur de mathématiques en première année de classe préparatoire, de qui j'ai tant appris et à qui je pense si souvent lorsque je me trouve, à mon tour, face à quelque difficulté d'ordre pédagogique. Je n'oublie pas l'équipe de mathématiques du laboratoire d'analyse non linéaire et de géométrie d'Avignon dont presque tous les membres ont été l'un de mes enseignants et qui m'ont permis d'obtenir l'agrégation grâce à la qualité de ce qu'ils m'ont appris.

Il m'est totalement impossible d'énumérer tout ce que je dois à Maman puisque c'est à elle que je dois d'aimer les mathématiques. C'est elle qui m'a appris le raisonnement et la rigueur mathématiques. Les problèmes de trains qui se croisent, les partages en parts inégales, les gateaux coupés en n morceaux des classes de primaires, les problèmes de géométrie ou d'arithmétiques des classe de collèges, les équations du second degré ou la notion de limite des classes de lycée, constituent des souvenirs impérissables tellement associés à elle. Aussi je lui dédicace ce travail, avec beaucoup de joie, en signe de reconnaissance.

Je remercie vivement mes collègues et le proviseur du lycée Galilée, et plus particulièrement mes collègues de l'équipe de mathématiques, qui m'ont vraiment facilité les tâches administratives et autres, durant ce premier trimestre, pour me permettre de terminer cette thèse.

J'ai une pensée affectueuse pour mes élèves qui, sans qu'ils s'en doutent, m'ont obligée à savoir exposer mes idées le plus clairement possibles. Ce qui n'a pas été sans influence sur mon travail de thèse.

Que dire à mes parents et à mes frères et soeurs, Benoit, Lucie, Mayeul, Hugues, Odon, Agathe, Guilhem et Grégoire, qui m'ont supportée pendant ces quatre années, surtout les jours ombrageux où rien ne fonctionnait... ce qui n'avait pas pour conséquence d'améliorer mon caractère ? Combien de fois, alors qu'ils me proposaient une distraction, n'ont-ils pas entendu : "lorsque j'aurai fini ma thèse" ?

INTRODUCTION

Une cause très petite qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard...

Mais lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement.

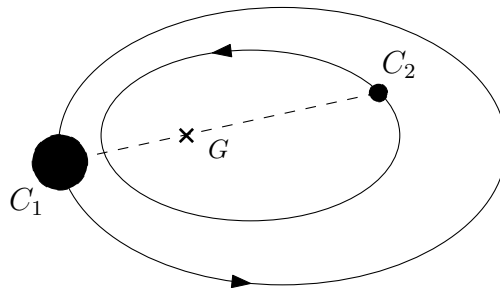
Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois;

mais il en n'est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux.

Henri Poincaré (1908)¹

Dans la dernière décennie du XIX^e siècle, H. Poincaré, dans ses travaux sur le problème des trois corps, est amené à étudier des courbes invariantes par une transformation d'une surface préservant l'aire. Voici comment.

Le problème des trois corps consiste à étudier les trajectoires ou orbites de trois planètes en interaction entre elles. Leur mouvement est régi par un système d'équations différentielles du second ordre qui traduit la loi de gravitation universelle de Newton. Il s'agit alors de trouver les trois coordonnées de position et de vitesse de chacune de ses trois planètes. L'espace des phases est donc de dimension 18. Devant la difficulté du problème, Poincaré va s'intéresser à un cas plus simple, le problème restreint des trois corps (voir [Po] et [Yo06]). Pour faciliter le problème, il fait certaines hypothèses sur la masse des corps ainsi que sur leur trajectoire. On considère trois corps C_1 , C_2 et C_3 dont le troisième C_3 est de masse nulle et n'influe pas sur le mouvement des deux autres corps mais en subit l'attraction. On suppose de plus que C_1 et C_2 dont le mouvement obéit aux lois de Kepler, se déplacent sur des ellipses dont l'un des foyers est le centre de gravité G des corps C_1 et C_2 :



¹H. Poincaré, *Sciences et méthode*, Paris, Flammarion, 1908, p.68

On s'intéresse alors à la trajectoire de C_3 que l'on suppose contenue dans le plan dans lequel évoluent C_1 et C_2 . On s'est donc ramené à un problème de dimension 4 correspondant aux deux coordonnées de position et de vitesse de C_3 . On se place enfin dans un repère tournant dans lequel C_1 et C_2 sont fixes.

On peut associer à ce système une quantité d'énergie, invariante au cours du temps. Les solutions sont ainsi tracées sur des hypersurfaces de dimension 3 qui correspondent à un niveau d'énergie que l'on peut calculer à partir de l'état du système. Poincaré a l'idée de considérer une surface M de dimension 2, transverse à la famille de courbes cherchées puis de définir une application T de cette surface sur elle-même, appelée application de premier retour : étant donné un point x de la surface, on considère la courbe solution passant par x à l'instant 0, puis on pose $T(x)$ le point où cette courbe rencontre M à nouveau et pour la première fois. On s'intéresse alors aux itérations successives $x, T(x), \dots, T^n(x), \dots$ de cette application T de la surface. On peut démontrer que cette application T est un difféomorphisme de la surface M qui conserve l'aire. D'un système dynamique continu de dimension 3, on s'est ramené à un problème à temps discret de dimension 2.

Simplifions encore le problème et négligeons la masse de C_2 . Dans ce cas, il devient assez facile de décrire le mouvement des trois corps. Le corps C_1 est immobile à l'origine et le corps C_3 , qui ne subit plus l'attraction de C_2 , décrit une ellipse dont C_1 occupe l'un des foyers. Dans le repère tournant, cette ellipse à un mouvement de rotation qui correspond à la rotation de C_2 autour de C_1 . Nous sommes donc face à deux mouvements de rotation qui se superposent : la rotation du grand axe de l'ellipse et le mouvement de C_3 sur cette ellipse. Les périodes de ces deux mouvements sont indépendantes et le mouvement dans son ensemble n'a que peu de chance d'être périodique. On parle de mouvement quasi-périodique. Observons comment cela se traduit sur la transformation T de la surface M . Des courbes fermées s'enroulent autour de l'un des points fixes du mouvement et dans des coordonnées bien choisies, T s'écrit sur chacune de ces courbes comme une rotation dont l'angle dépend de la courbe. Que devient ce phénomène lorsque la masse de C_2 ne peut plus être supposée nulle mais seulement très petite devant celle de C_1 ?

G.-D. Birkhoff s'est intéressé à la question dans ses recherches sur les courbes invariantes par un difféomorphisme de l'anneau déviant la verticale (voir [Bi22], [Bi32a] et [Bi32b]). Voici ce qu'il écrit en 1932² :

" Au moyen de la transformation T , la question fondamentale de la stabilité se pose de la manière suivante : répétons indéfiniment la transformation T (ou T^{-1}) et considérons les images successives d'un point P situé à une distance plus petite que δ du point invariant $(0, 0)$. Est-il toujours possible de choisir δ suffisamment petit pour que ces images restent à une distance moindre que $\varepsilon > 0$, de ce point, ε étant un nombre donné, arbitrairement petit ? S'il en est ainsi, on aura stabilité au sens strict du mot. Jusqu'ici on n'a pas pu répondre à ce problème dans toute sa généralité.

Comme le remarquait Poincaré, pour que dans un cas donné, il y ait stabilité, il faut et il suffit qu'il existe des courbes invariantes arbitrairement petites autour du point invariant."

Environ vingt ans après la théorie de Birkhoff, le théorème des courbes invariantes, connu sous le nom de théorème KAM pour Kolmogorov, Arnold et Moser, donne des éléments de réponse en démontrant la persistance de courbes invariantes autour des points périodiques elliptiques après perturbation en topologie C^k avec $k \geq 3$. Voici l'énoncé donné par S. Newhouse dans [Nh] :

²G.-D. Birkoff. Sur l'existence des régions d'instabilité en dynamique, *Annales de l'I.H.P.*, 2, n° 4, 1932, p.371

THÉORÈME DES COURBES INVARIANTES (KAM). — Soit $r \geq 3$. Il existe un G_δ dense \mathcal{G} d'un ouvert non vide de l'ensemble des difféomorphismes symplectiques d'une surface muni de la C^r topologie forte de Whitney³ tel que tout difféomorphisme f de \mathcal{G} a un point fixe qui est limite de courbes invariantes par f l'entourant et sur lesquelles f est conjugué à une rotation minimale.

M. Herman a démontré dans [He83] que la différentiabilité $r = 3$ est optimale en donnant des contre-exemples de classe $C^{3-\varepsilon}$. Qu'advient-il alors en topologie de classe moins élevée ?

Notons que M. Herman s'est déjà intéressé à la question dans l'article précédemment cité à propos des applications déviant la verticale, en se plaçant dans le cadre de la théorie de Birkhoff. Il démontre qu'un difféomorphisme de l'anneau déviant la verticale C^1 -générique n'admet pas de points périodiques sur les courbes fermées simples qu'il laisse invariantes. Nous reviendrons sur ce résultat dans le deuxième chapitre de ce travail.

Par ailleurs l'étude des dynamiques C^1 -génériques connaît depuis une vingtaine d'années de nombreux développements grâce notamment au Connecting Lemma de S. Hayashi (voir [Ha97]) puis aux travaux de C. Bonatti, S. Crovisier et M.-C. Arnaud. Bonatti et Crovisier ont démontré dans [BC04] qu'un difféomorphisme C^1 -générique d'une surface compacte est transitif, c'est à dire admet une orbite dense. Ils ont ensuite adapté ce résultat avec M.-C. Arnaud dans [ABC05] au cas d'une surface non compacte en démontrant qu'un difféomorphisme symplectique C^1 -générique admet une partie dense dont les points ont une orbite positive qui sort de tout compact.

Notons que ces deux résultats ne sont pas envisageables dans le cadre du théorème des courbes invariantes. Ils permettent en revanche de penser qu'un difféomorphisme symplectique générique d'une surface, en topologie C^1 , n'admet pas de courbes invariantes (une courbe désigne une application du cercle dans une surface, injective et continue, application que l'on confond avec son image lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté). Par exemple, dans le plan, on sait grâce au théorème de Jordan, qu'une courbe sépare le plan en deux composantes connexes dont une exactement est relativement compacte. Cette composante connexe ne peut être invariante par un difféomorphisme générique donné par le résultat de M.-C. Arnaud, C. Bonatti et S. Crovisier puisqu'elle rencontre une orbite qui sort de tout compact. Son image par une itérée du difféomorphisme est donc l'autre composante connexe... qui n'est pas compacte. Ceci est impossible. Le but de ce travail est de généraliser ce résultat à une surface symplectique quelconque.

THÉORÈME. — Soit (M, ω) une surface symplectique. Il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ dont les éléments n'admettent pas de courbe continue fermée simple invariante.

La preuve de ce résultat s'appuie largement sur des considérations dynamiques. Nous allons dans un premier temps nous appuyer sur le Connecting Lemma. Il interviendra à travers les résultats de genericité démontrés par M.-C. Arnaud, C. Bonatti et S. Crovisier dans [ABC05], puis de façon directe pour démontrer qu'une courbe invariante par un difféomorphisme symplectique générique contient nécessairement des points périodiques.

Puis nous utiliserons les caractéristiques des points périodiques d'un difféomorphisme symplectique, selon qu'ils sont hyperboliques ou elliptiques, pour démontrer qu'une courbe invariante ne possède pas de points périodiques. Pour cela nous aurons recours aux variétés stables et instables des points périodiques hyperboliques.

Voici comment s'articulent les différentes étapes de notre raisonnement. Comme les courbes qui nous intéressent sont continues, les théorèmes de topologie du plan ou de la sphère tels que les

³ La topologie forte de Whitney est définie dans le premier paragraphe du chapitre 2

théorèmes de Jordan ou de Schoënfliès sont les premiers résultats que nous allons exploiter et qui nous seront très utiles dans le cadre de l’anneau puis dans le cadre d’une surface quelconque. Soyons plus précis. Nous connaissons parfaitement les caractéristiques topologiques du complémentaire de l’image d’une courbe fermée simple du plan, de la sphère puis de l’anneau. Nous allons donc, dans le cadre d’une surface quelconque, construire une famille dénombrable d’ouverts homéomorphes à l’anneau contenant une base de voisinages de toute courbe fermée simple, ce qui nous permettra localement d’utiliser les caractéristiques topologiques de l’anneau pour étudier le complémentaire de l’image d’une courbe. Cette étude du complémentaire d’une courbe fermée simple continue ainsi que la construction de cette famille dénombrable d’ouverts homéomorphes à des anneaux est le but principal du premier chapitre.

Le second chapitre s’articule autour de deux pôles. Nous allons, en premier lieu, utiliser le Connecting Lemma, pour supprimer, nous l’avons déjà dit, les courbes invariantes qui ne contiennent pas de points périodiques. Pour cela, nous utiliserons la famille dénombrable d’anneau construite dans le premier chapitre. Puis, nous construirons un G_δ dense de difféomorphismes symplectiques pour lesquels il est impossible que les courbes invariantes ne contiennent que des points périodiques hyperboliques. A ce stade, nous aurons construit un G_δ de l’ensemble des difféomorphismes symplectiques dont les éléments possèdent nécessairement un point périodique elliptique sur toutes les courbes qu’ils laissent invariantes.

Le troisième chapitre traite des points périodiques elliptiques. En perturbant les difféomorphismes symplectiques au voisinage de ces points périodiques, nous entourerons ces points de courbes C^1 par morceaux formées de morceaux de variétés stables ou instables de points périodiques. Pour cela, nous élaborerons une propriété, la propriété Γ , qui concerne les difféomorphismes et leurs points périodiques elliptiques. Nous démontrerons qu’il est impossible qu’une courbe contienne un point périodique elliptique d’un difféomorphisme si ce difféomorphisme vérifie cette propriété avec ce point. L’idée de cette propriété Γ réside dans un article de E. Zehnder (cf. [Ze73]). Ceci nous permettra de construire un G_δ dense dont les éléments n’ont aucun point périodique elliptique appartenant à une courbe invariante en démontrant qu’un difféomorphisme symplectique générique vérifie avec tous ses points périodiques elliptiques cette propriété Γ .

Pour perturber des difféomorphismes symplectiques, le formalisme des fonctions génératrices s’impose. C’est le propos du quatrième chapitre qui définit de façon rigoureuse la notion de fonction génératrice pour quelques classes d’applications symplectiques. On peut trouver dans ce chapitre des exemples de perturbation de difféomorphismes symplectiques. On démontrera en particulier comment perturber un difféomorphisme au voisinage d’un point périodique elliptique pour construire une courbe C^1 qui entoure ce point et qui contient un nombre fini de points périodiques hyperboliques. Notons que ce chapitre est indépendant des trois précédents et que nous nous y référerons au cours du troisième chapitre.

Il est important de constater que le Connecting Lemma est un résultat de topologie C^1 . Toutes les propositions qui utilisent ce dernier dans leur preuve, sont des résultats de topologie C^1 et ne peuvent être généralisés en topologie de classe plus élevée.

En revanche, tout ce qui concerne les courbes invariantes contenant des points périodiques, peut s’étendre à toutes les régularités. En particulier, pour adapter ce qui est relatif à la propriété Γ , il faut utiliser des formes normales à un ordre suffisamment élevé. On peut consulter [Ch83] ou [Go01] ou encore [LC90] à propos des formes normales. En tout cas, ces formes normales permettent de perturber des difféomorphismes, à l’aide des fonctions génératrices, en topologie de classe C^k , ce que

nous n'avons pas fait dans notre travail où nous utilisons seulement un développement limité à l'ordre 1 pour remplacer localement un difféomorphisme par son application tangente.

On peut donc se demander ce que devient le résultat énoncé ci-dessus en topologie de classe C^k où k est un entier strictement compris entre 1 et 3. la question reste ouverte. Rappelons que si $k \geq 3$, la réponse est donnée par le théorème des courbes invariantes.

Notons que notre résultat est vrai dans la catégorie des difféomorphismes exacts symplectiques d'une surface munie d'une forme symplectique exacte. Cette remarque a son intérêt car dans le cas de l'anneau, nous verrons au paragraphe 1.4 du chapitre II qu'il est facile en composant un difféomorphisme symplectique avec une translation de faire disparaître toutes ses courbes invariantes essentielles.

Chapitre I

Courbes continues sur une surface symplectique, un point
de vue topologique

Dans ce travail, une **surface** désigne une variété riemannienne de dimension 2 de classe C^1 connexe, compacte ou non.

Une **forme symplectique** ω sur une surface M est une 2-forme différentielle fermée non dégénérée. Une surface M munie d'une forme symplectique ω est une **surface symplectique** notée (M, ω) .

La forme symplectique ω est **exacte** s'il existe une 1-forme λ sur la surface M telle que $\omega = d\lambda$. Dans ce cas on dit que (M, ω) est une **surface symplectique exacte**.

Une application f de classe C^1 sur une surface symplectique (M, ω) est **symplectique** si $f^*\omega = \omega$ c'est-à-dire si :

$$\forall p \in M \text{ et } \forall (u, v) \in (T_p M)^2, \omega_{f(p)}(Df(p)u, Df(p)v) = \omega_p(u, v).$$

Si $\omega = d\lambda$ est exacte, une application f de classe C^1 de M est **symplectique exacte** si la 1-forme $f^*\lambda - \lambda$ est exacte.

Notation : on notera $\text{Diff}_\omega^1(M)$ l'ensemble des difféomorphismes symplectiques d'une surface symplectique (M, ω) .

Voici quelques exemples de surfaces symplectiques avec lesquelles nous allons souvent travailler :

- Le plan \mathbb{R}^2 muni de la forme symplectique exacte canonique $dx \wedge dy = d(xdy)$ où $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement la projection selon la première et la seconde variable.

Notons que le théorème de Darboux permet de se ramener à la forme symplectique canonique sur \mathbb{R}^2 au voisinage de tout point d'une surface symplectique :

PROPOSITION 0.1. — *Soit (M, ω) une surface symplectique et $x \in M$. Il existe une carte (U, h) en x telle que $h^*dx \wedge dy = \omega$ où $dx \wedge dy$ est la forme symplectique canonique sur \mathbb{R}^2 .*

Pour une preuve de ce résultat, nous renvoyons à [Ar76].

- L'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ muni de la forme symplectique exacte $d\theta \wedge dr = d(-rd\theta)$ telle que $\Pi^*d\theta \wedge dr$ est la forme symplectique canonique de \mathbb{R}^2 , l'application Π étant le revêtement universel de l'anneau défini par :

$$\begin{aligned} \Pi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{A} \\ (\tilde{\theta}, r) &\mapsto (\theta, r) \end{aligned}$$

où $\theta = \{\tilde{\theta} + n : n \in \mathbb{Z}\}$ est la classe d'équivalence de $\tilde{\theta}$ modulo \mathbb{Z} .

L'espace tangent de l'anneau possède une trivialisatation canonique. Pour cela il suffit de considérer la base duale $(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial r})$ de la base $(d\theta, dr)$ de l'espace des 1-formes de l'anneau.

- la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ qui est une sous variété de dimension deux de \mathbb{R}^3 que l'on munit de la forme symplectique ω définie en $p \in \mathbb{S}^2$ par :

$$\omega_p(u, v) = dx \wedge dy \wedge dz(p, u, v), \quad \forall (u, v) \in T_p \mathbb{S}^2.$$

où $dx \wedge dy \wedge dz$ est la 3-forme canonique sur \mathbb{R}^3 .

Le but de ce chapitre est d'étudier les courbes continues d'une surface symplectique. Par exemple donner des caractéristiques topologiques des composantes connexes du complémentaire de l'image de ces courbes puis d'étudier les images de ces composantes par un difféomorphisme symplectique. Les résultats que nous allons énoncer ou démontrer vont nous être utiles tout au long de ce travail.

Comme les objets de notre étude sont les courbes continues, le point de vue adopté est un point de vue purement topologique. Par conséquent, nous allons devoir travailler dans une surface topologique dénombrable à l'infini, orientée, avec des homéomorphismes qui préservent l'orientation, ce que sont respectivement, nous allons le voir, les surfaces symplectiques et les difféomorphismes symplectiques.

Le premier paragraphe rappelle quelques propriétés des homéomorphismes du cercle que nous utiliserons à propos des courbes fermées simples invariantes par un homéomorphisme d'une surface.

Puis nous étudierons les courbes fermées simples de la sphère de l'anneau et du plan. Ce qui nous permettra de définir l'orientation d'une surface topologique, de définir un homéomorphisme qui préserve l'orientation, et enfin la gauche et la droite (au moins localement) d'un arc et d'une courbe fermée simple. Nous étudierons alors les courbes fermées simples invariantes par un homéomorphisme préservant l'orientation.

Dans le troisième paragraphe de ce chapitre, nous construirons une famille dénombrable d'ensembles homéomorphes à des anneaux, famille qui constitue une base de voisinages d'une courbe fermée simple d'une surface.

1 Application continue de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{T}^1 .

Considérons le cercle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ainsi que le revêtement universel du cercle \mathbb{T}^1 :

$$\begin{array}{ccc} \pi : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{T}^1 \\ \tilde{\theta} & \mapsto & \theta \end{array}$$

où $\theta = \{\tilde{\theta} + n : n \in \mathbb{Z}\}$ est la classe d'équivalence de θ modulo \mathbb{Z} .

DÉFINITION 1.1. — Soit a et b deux points distincts du cercle \mathbb{T}^1 . On appelle arc orienté d'origine a d'extrémité b , noté $[a; b]$, le sous ensemble de \mathbb{T}^1 défini par :

$$[a; b] = \{\pi(\tilde{\theta}) \mid \tilde{\theta} \in [\tilde{a}; \tilde{b}]\}.$$

où \tilde{a} et \tilde{b} sont respectivement des représentants de a et b tels que $0 < \tilde{b} - \tilde{a} \leq 1$.

On note $]a; b[$, $]a; b]$ et $[a; b[$ les arcs $[a; b]$ privés respectivement de a et b ou de a seulement ou de b seulement.

Soit a, b et c trois points deux à deux distincts du cercle, on note $a < c < b$ si $c \in]a; b[$.

PROPOSITION ET DÉFINITION 1.2. — Soit f une application continue de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{T}^1 et F un relèvement de f , il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x+1) = F(x) + k.$$

Cet entier k est le **degré** de l'application f . On le note $\deg(f)$.

Le degré d'une application continue du cercle ne dépend que de sa classe d'homotopie dans l'ensemble des applications continues du cercle muni de la convergence uniforme.

On peut trouver une preuve de ce résultat par exemple dans [Ro99].

PROPOSITION 1.3. — Si f est un homéomorphisme du cercle alors $|\deg(f)| = 1$.

DÉFINITION 1.4. — Soit f un homéomorphisme du cercle. Si $\deg(f) = 1$, on dit que f préserve l'orientation. Sinon f renverse l'orientation.

On note $\text{Homéo}^+(\mathbb{T}^1)$ l'ensemble des homéomorphisme du cercle qui préservent l'orientation et $\text{Homéo}^-(\mathbb{T}^1)$ l'ensemble de ceux qui renversent l'orientation.

PROPOSITION 1.5. — Soit f un homéomorphisme du cercle qui préserve l'orientation et qui possède des points périodiques alors tous ses points périodiques admettent la même période $k \in \mathbb{N}^*$.

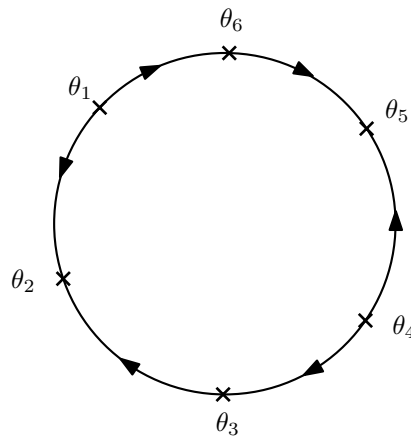
De plus si θ_1 et θ_2 sont deux points périodiques de f et si l'arc $] \theta_1; \theta_2[$ ne contient pas d'autre point périodique alors :

$$\forall \theta \in] \theta_1; \theta_2[, \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nk}(\theta) = \theta_1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-nk}(\theta) = \theta_2,$$

ou

$$\forall \theta \in] \theta_1; \theta_2[, \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nk}(\theta) = \theta_2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-nk}(\theta) = \theta_1.$$

Voici un schéma qui illustre la proposition ci-dessus :



Les $\theta_i, i \in \{1; \dots; 6\}$ sont les points périodiques de f .

Soit $\theta \in] \theta_1; \theta_2[, \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nk}(\theta) = \theta_2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-nk}(\theta) = \theta_1$.

Démonstration. — Le fait que tout les points périodiques d'un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation aient la même période repose sur les résultats relatifs au nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation. Nous renvoyons à [Ka95] qui développe la question.

Fixons F un relèvement de f . Rappelons seulement que dans le cas où f possède des points périodiques, il existe deux entiers $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que k est la période de tout point périodique de f et tels que si θ est un point périodique de f alors $F^k(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta} + m$.

Soit θ_1 et θ_2 deux points périodiques de f tels que f ne possède pas de points périodiques dans l'arc $] \theta_1; \theta_2[$. Fixons $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_2$ deux réels tels que $\pi(\tilde{\theta}_1) = \theta_1$, $\pi(\tilde{\theta}_2) = \theta_2$ et $0 < \tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2 \leq 1$.

Remarquons que $F^k(\tilde{\theta}_1) - m = \tilde{\theta}_1$ et $F^k(\tilde{\theta}_2) - m = \tilde{\theta}_2$ et que $F^k(x) - m \neq x$ quelque soit $x \in]\tilde{\theta}_1; \tilde{\theta}_2[$. Ainsi l'application $G : x \in]\tilde{\theta}_1; \tilde{\theta}_2[\mapsto F^k(x) - m$ est un homéomorphisme croissant de $]\tilde{\theta}_1; \tilde{\theta}_2[$ tel que $G(x) \neq x$ quelque soit $x \in]\tilde{\theta}_1; \tilde{\theta}_2[$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $G(x) - x$ ne change pas de signe sur $]\tilde{\theta}_1; \tilde{\theta}_2[$. Il y a donc deux cas :

- $G(x) - x > 0, \forall x \in]\tilde{\theta}_1; \tilde{\theta}_2[$.

Soit donc $x \in]\tilde{\theta}_1; \tilde{\theta}_2[$. L'application G étant strictement croissante, la suite $(G^n(x))$ est une suite de $]\tilde{\theta}_1; \tilde{\theta}_2[$ strictement croissante majorée par $\tilde{\theta}_2$. Elle est donc convergente et sa limite est un point fixe de G c'est-à-dire $\tilde{\theta}_1$ ou $\tilde{\theta}_2$. Etant strictement croissante, elle converge donc vers $\tilde{\theta}_2$. Ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nk}(\pi(x)) = \theta_2$.

L'application G^{-1} est aussi une application strictement croissante et $G^{-1}(x) - x < 0$. La suite $(G^{-n}(x))$ est alors strictement décroissante et minorée par $\tilde{\theta}_1$. Elle converge vers un point de fixe de G^{-1} c'est-à-dire de $\tilde{\theta}_1$ ou $\tilde{\theta}_2$. Etant strictement décroissante, elle converge donc vers $\tilde{\theta}_1$. Ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-nk}(\pi(x)) = \theta_1$.

Dans ce cas, on obtient que pour tout $\theta \in]\theta_1; \theta_2[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nk}(\theta) = \theta_1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-nk}(\theta) = \theta_2$.

- $G(x) - x < 0, \forall x \in]\tilde{\theta}_1; \tilde{\theta}_2[$.

Un raisonnement similaire au raisonnement utilisé dans le cas précédent montre que pour tout $\theta \in]\theta_1; \theta_2[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nk}(\theta) = \theta_2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-nk}(\theta) = \theta_1$. □

PROPOSITION 1.6. — *Soit f un homéomorphisme du cercle qui renverse l'orientation alors f possède exactement deux points fixes. De plus ses points périodiques sont ou des points fixes ou des points de période 2.*

Démonstration. — Soit F un relèvement de f . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que F est un homéomorphisme décroissant de \mathbb{R} . En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à l'application $F - \text{id}$, on sait que pour tout entier k , il existe un réel unique θ_k tel que $F(\theta_k) = \theta_k + k$. Les points $\pi(\theta_k)$ du cercle sont alors les points fixes de f . Or par récurrence, et en utilisant le fait que le degré de f est égal à -1 , on vérifie que pour tout entier relatif k :

$$F(\theta_0 - k) = F(\theta_0) + k = \theta_0 + k = (\theta_0 - k) + 2k. \quad (\star)$$

Par unicité de θ_{2k} , on obtient alors que $\theta_{2k} = \theta_0 - k$. Ce qui démontre :

$$\pi(\theta_{2k}) = \pi(\theta_0).$$

De la même façon, on obtient que :

$$F(\theta_1 - k) = F\theta_1) + k = \theta_1 + 1 + k = (\theta_1 - k) + 2k + 1.$$

Ce qui démontre, par unicité de θ_{2k+1} , que :

$$\pi(\theta_{2k+1}) = \pi(\theta_1).$$

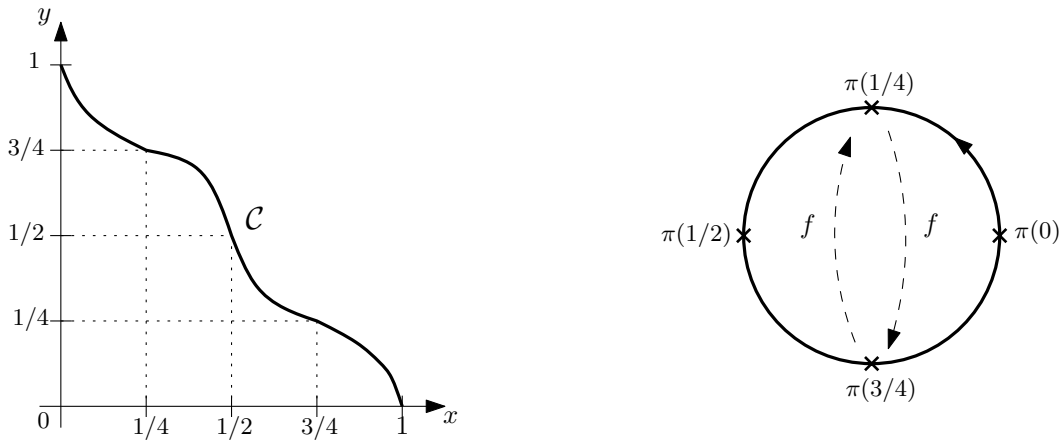
L'application f possède donc au plus deux points fixes qui sont $\pi(\theta_0)$ et $\pi(\theta_1)$. Il reste à démontrer que $\pi(\theta_0)$ et $\pi(\theta_1)$ sont deux points distincts. Dans le cas contraire, c'est à dire si $\pi(\theta_0) = \pi(\theta_1)$, il existe un entier n tel que $\theta_1 = \theta_0 + n$. Ce qui d'après (\star) implique que $F(\theta_1) = \theta_1 - 2n$. Ceci est impossible puisque $F(\theta_1) = \theta + 1$. Par conséquent :

$$\pi(\theta_0) \neq \pi(\theta_1).$$

Pour la seconde partie de la proposition, considérons f^2 qui est un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation. Le point fixe de f est aussi un point fixe pour f^2 . D'après la proposition 1.5, les points périodiques de f^2 sont tous des points fixes. Par conséquent les points périodiques de f sont ou des points fixes ou des points périodiques de période 2. \square

EXEMPLE 1.7. Voici l'exemple d'un homéomorphisme du cercle qui renverse l'orientation et qui possède à la fois des points fixes et des points de période 2.

Pour cela, considérons la fonction F définie sur \mathbb{R} dont la restriction sur $[0; 1]$ est représentée par la courbe \mathcal{C} dessinée ci-dessous et qui vérifie la relation $F(x + 1) = F(x) - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.



L'application F est un homéomorphisme décroissant de \mathbb{R} . Il définit une application du cercle f vérifiant pour tout réel x la relation $f \circ \pi(x) = \pi \circ F(x)$. Cette application f est un homéomorphisme qui renverse l'orientation. Les points $\pi(0)$ et $\pi(1/2)$ sont deux points fixes de f alors que $\pi(1/4)$ et $\pi(3/4)$ sont deux points de période 2 de f . Les autres points du cercle ne sont pas périodiques pour l'application f .

2 Résultats généraux de topologie plane

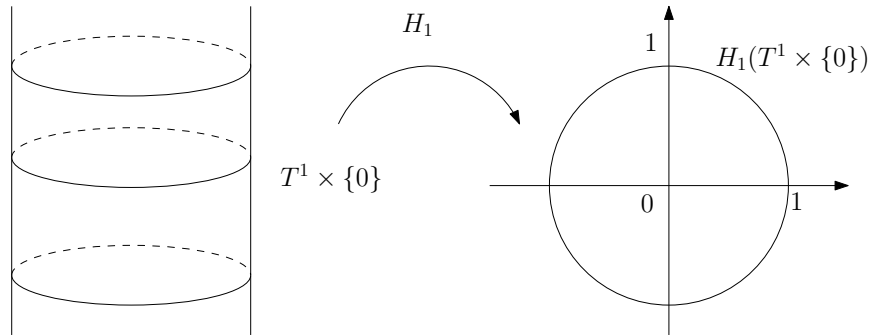
2.1 Correspondances topologiques entre la sphère, le plan et l'anneau

Selon le contexte, il est préférable de travailler dans la sphère, le plan ou l'anneau de façon à utiliser leurs propriétés topologiques respectives. Mais comment naviguer de l'un à l'autre au sens topologique c'est-à-dire par homéomorphisme ?

L'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ via l'homéomorphisme suivant :

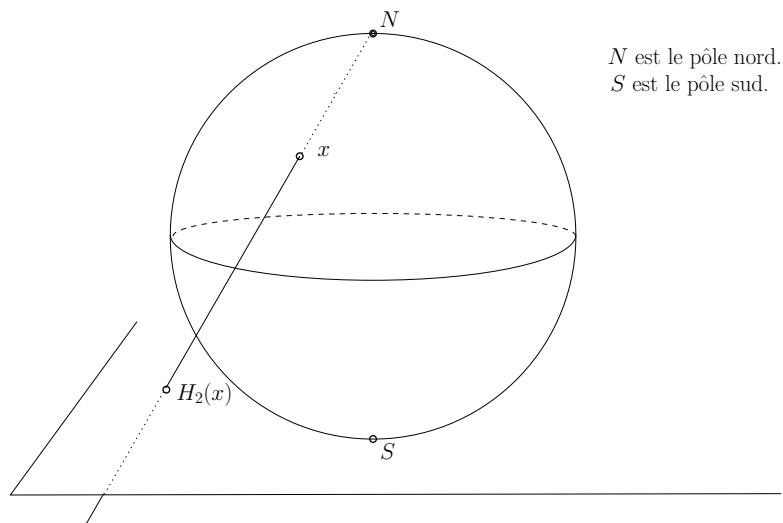
$$H_1 : \begin{array}{lcl} \mathbb{A} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (\theta, r) & \mapsto & (e^r \cos(2\pi\tilde{\theta}), e^r \sin(2\pi\tilde{\theta})) \end{array}$$

où $\tilde{\theta}$ est un représentant de θ .



DÉFINITION 2.1. — On appelle **anneau** tout espace topologique homéomorphe à l'anneau \mathbb{A} .

Le plan \mathbb{R}^2 est homéomorphe à \mathbb{S}^2 privé d'un point via la projection stéréographique notée H_2 .



REMARQUE 2.2. — Un anneau est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et à $\mathbb{S}^2 \setminus \{S; N\}$.

2.2 Homotopie et simple connexité

• Définitions

Soit M une surface.

- Un **arc** de M est une application continue injective d'un intervalle de \mathbb{R} dans M . L'image d'un arc $\alpha : I \rightarrow M$ est notée $\alpha(I)$.
- Une **courbe** de M est une application continue du cercle \mathbb{T}^1 dans M . L'image d'une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ est notée $\gamma(\mathbb{T}^1)$.
On dit qu'une courbe γ est de classe C^1 si l'application γ est de classe C^1 .
- Une **courbe simple** de M est un plongement (c'est-à-dire une application continue injective) de \mathbb{T}^1 dans M .
- Soit γ_0 et γ_1 deux courbes de M dont les images sont incluses dans une partie X de M . Les courbes γ_0 et γ_1 sont **homotopes** dans X s'il existe une famille de courbes $(\gamma_s)_{0 \leq s \leq 1}$ dont les images sont incluses dans X et telle que l'application $(s, t) \in [0; 1] \times \mathbb{T}^1 \mapsto \gamma_s(t) \in X$ est continue.
La famille $(\gamma_s)_{0 \leq s \leq 1}$ est une homotopie entre γ_0 et γ_1 dans X .
- Soit γ une courbe de M dont l'image est incluse dans une partie X de M . La courbe γ est un **homotope à un point** x dans X s'il existe une homotopie dans X entre γ et la courbe dont l'image est réduite au point x .
- Soit X un ouvert connexe de M . On dit que X est **simplement connexe** si toute courbe de X est homotope à un point dans X .

• Quelques résultats de topologie plane déjà connus

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous allons travailler dans la sphère, le plan ou l'anneau. Pour une démonstration de ces résultats, nous renvoyons à [Nm92].

PROPOSITION 2.3. — *La sphère \mathbb{S}^2 et le plan \mathbb{R}^2 sont simplement connexes. L'anneau \mathbb{A} ne l'est pas.*

PROPOSITION 2.4. — *Soit D un ouvert simplement connexe de \mathbb{S}^2 . L'ensemble $\mathbb{S}^2 \setminus D$ est connexe.*

PROPOSITION 2.5. — *Soit F un fermé connexe de \mathbb{S}^2 . Les composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus F$ sont des ouverts simplement connexes de \mathbb{S}^2 .*

PROPOSITION 2.6. — *Tout ouvert simplement connexe de \mathbb{S}^2 autre que \mathbb{S}^2 lui-même est homéomorphe à \mathbb{R}^2 .*

Comme corollaire des propositions 2.5 et 2.6, nous obtenons le résultat suivant :

COROLLAIRE 2.7. — *Soit K un connexe fermé non vide de \mathbb{S}^2 . Les composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus K$ sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 .*

PROPOSITION 2.8. — *Soit A un anneau inclus dans la sphère \mathbb{S}^2 . L'ensemble $\mathbb{S}^2 \setminus A$ possède exactement deux composantes connexes.*

• **Ce que l'on peut en déduire d'utile pour la suite**

PROPOSITION 2.9. — *Soit K un compact connexe non vide de \mathbb{R}^2 . L'une des composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus K$ est non bornée et homéomorphe à \mathbb{A} . Toutes les autres sont bornées et homéomorphes à \mathbb{R}^2 .*

Démonstration. — Utilisons H_2^{-1} pour travailler dans \mathbb{S}^2 . L'ensemble $K' = H_2^{-1}(K)$ est un compact connexe de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. C'est donc un fermé connexe de \mathbb{S}^2 . D'après la proposition 2.5, les composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus K'$ sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 .

Soit C la composante connexe de $\mathbb{S}^2 \setminus K'$ contenant N . L'ouvert $C \setminus \{N\}$ est alors homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et donc à l'anneau \mathbb{A} .

Par conséquent, $H_2(C \setminus \{N\})$ est une composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus K$ homéomorphe à \mathbb{A} .

Soit C' une composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus K$ distincte de $H_2(C \setminus \{N\})$. Elle est l'image par H_2 d'une composante connexe de $\mathbb{S}^2 \setminus K'$ qui ne contient pas N . Or cette composante connexe est homéomorphe à \mathbb{R}^2 et incluse dans le compact $\mathbb{S}^2 \setminus C$. La composante C' est donc bornée et homéomorphe à \mathbb{R}^2 . \square

PROPOSITION 2.10. — *Soit K_1 et K_2 deux fermés connexes non vides de \mathbb{S}^2 disjoints. L'une des composantes connexes non vides de $\mathbb{S}^2 \setminus (K_1 \cup K_2)$ est homéomorphe à \mathbb{A} . Les autres sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 .*

Démonstration. — Soit \mathcal{C} l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus K_1$. Les fermés K_1 et K_2 étant disjoints et K_2 étant connexe, K_2 est inclus dans l'une des composantes connexes c de $\mathbb{S}^2 \setminus K_1$. Soit \mathcal{C}' l'ensemble des composantes connexes de $c \setminus K_2$. L'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus (K_1 \cup K_2)$ est alors $\mathcal{C} \setminus \{c\} \cup \mathcal{C}'$.

D'après le corollaire 2.7, K_1 étant un compact connexe fermé non vide de \mathbb{S}^2 , les éléments de \mathcal{C} sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 .

En particulier, c est homéomorphe à \mathbb{R}^2 . Ainsi, d'après la proposition 2.9, K_2 étant un compact connexe non vide de c , l'une des composantes connexes de $c \setminus K_2$ est homéomorphe à \mathbb{A} , les autres sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 .

Ainsi l'une des composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus (K_1 \cup K_2)$ est homéomorphe à \mathbb{A} , toutes les autres sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 . \square

2.3 Théorème de Jordan

Nous allons énoncer ce théorème dans \mathbb{S}^2 , puis dans \mathbb{R}^2 où nous aborderons la notion d'indice d'une courbe par rapport à un point et d'orientation positive ou négative d'une courbe du plan.

La preuve de ces résultats peut être consultée dans [Nm92].

• Dans la sphère

THÉOREME 2.11. — Soit γ une courbe simple de la sphère, alors $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède exactement deux composantes connexes dont $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est la frontière commune.

REMARQUE 2.12. — D'après le corollaire 2.7, chacune des composantes connexes du complémentaire d'une courbe simple de la sphère est homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

• Dans le plan

Munissons \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne usuelle notée $\| \cdot \|$.

PROPOSITION ET DÉFINITION 2.13. — Soit $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe du plan et $x \notin \gamma(\mathbb{T}^1)$, l'indice de x par rapport à γ notée $\text{ind}(x, \gamma)$, est le degré de l'application du cercle

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^1 & \rightarrow & \mathbb{T}^1 \\ \theta & \mapsto & \pi(\phi_\theta) \end{array}$$

où ϕ_θ est défini à un entier près par $(\cos(2\pi\phi_\theta), \sin(2\pi\phi_\theta)) = \frac{\gamma(\theta) - x}{\|\gamma(\theta) - x\|}$.

Si $(\gamma_s)_{0 \leq s \leq 1}$ est une homotopie entre deux courbes γ_0 et γ_1 et si x est un point du plan tel que $x \notin \gamma_s(\mathbb{T}^1)$ pour tout $s \in [0; 1]$ alors $\text{ind}(x, \gamma_0) = \text{ind}(x, \gamma_1)$.

THÉOREME 2.14. — Soit γ une courbe fermée simple du plan, alors $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède exactement deux composantes connexes dont $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est la frontière commune. L'une d'elles, appelée intérieur de γ notée $\text{int}(\gamma)$ est bornée. L'autre, appelée extérieur de γ notée $\text{ext}(\gamma)$ est non bornée.

On a de plus pour tout $x \notin \gamma(\mathbb{T}^1)$:

$$x \in \text{int}(\gamma) \iff \text{ind}(x, \gamma) = \pm 1$$

$$x \in \text{ext}(\gamma) \iff \text{ind}(x, \gamma) = 0.$$

REMARQUE 2.15. — D'après la proposition 2.9, si γ est une courbe simple du plan, $\text{int}(\gamma)$ est homéomorphe à \mathbb{R}^2 alors que $\text{ext}(\gamma)$ est homéomorphe à \mathbb{A} .

DÉFINITION 2.16. — Une courbe simple γ est **orientée positivement** si pour tout $x \in \text{int}(\gamma)$, $\text{ind}(x, \gamma) = +1$.

2.4 Le théorème de Schoenflies

Nous allons énoncer deux versions très classiques du théorème de Schoenflies dont les preuves sont données par exemple dans [Nm92] ou dans [Fa]. On peut déduire de ce théorème de nombreux résultats, en particulier il permet de prolonger des homéomorphismes entre des arcs du plan. Pour cela nous renvoyons aussi à [Fa].

Nous noterons \overline{D} le disque unité fermé de \mathbb{R}^2 .

THÉOREME 2.17. — *Soit γ une courbe fermée simple de la sphère et C une composante connexe de $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$. Il existe un homéomorphisme entre \overline{D} et $C \cup \gamma(\mathbb{T}^1)$.*

THÉOREME 2.18. — *Soit γ et γ' deux courbes fermées simples du plan. Tout homéomorphisme $h : \gamma(\mathbb{T}^1) \rightarrow \gamma'(\mathbb{T}^1)$ se prolonge en un homéomorphisme de $\gamma(\mathbb{T}^1) \cup \text{int}(\gamma)$ sur $\gamma'(\mathbb{T}^1) \cup \text{int}(\gamma')$ (et donc en un homéomorphisme de \mathbb{R}^2).*

THÉOREME 2.19. — *Soit I un intervalle et $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc continu. Il existe un homéomorphisme h de \mathbb{R}^2 tel que $h(t, 0) = \alpha(t)$ quelque soit $t \in I$.*

2.5 Etude des courbes d'un anneau

Étudions les caractéristiques topologiques des composantes connexes du complémentaire d'une courbe simple d'un anneau.

PROPOSITION ET DÉFINITION 2.20. — *Soit γ une courbe simple d'un anneau A . L'ensemble $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède exactement deux composantes connexes dont $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est la frontière commune. Deux cas se présentent :*

1. *l'une d'elles est relativement compacte et homéomorphe à \mathbb{R}^2 ,*
2. *les deux composantes connexes ne sont pas relativement compacte, elles sont toutes les deux des anneaux et γ n'est pas homotope à un point.*

*Dans le premier cas, la courbe γ est homotope à un point. Dans le second cas, on dit que la courbe γ est une **courbe simple essentielle** de l'anneau.*

Démonstration. — L'ensemble A est un anneau. Soit donc h un homéomorphisme entre A et $\mathbb{S}^2 \setminus \{N; S\}$. D'après le théorème de Jordan, $\mathbb{S}^2 \setminus h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède deux composantes connexes C_1 et C_2 dont $h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$ est la frontière commune. D'après la remarque 2.12, C_1 et C_2 sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 . Il y a deux cas :

1. Les pôles N et S appartiennent à la même composante connexe. Supposons que C_1 est la composante connexe de $\mathbb{S}^2 \setminus h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$ ne contenant pas les pôles. D'après la version 2.17 du théorème

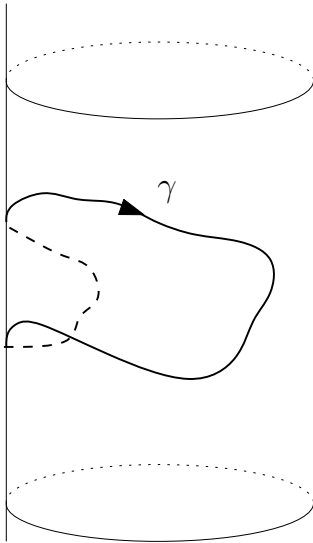
de Schoenflies, il existe un homéomorphisme entre le disque unité fermé \overline{D} et $C_1 \cup h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$. La courbe $h \circ \gamma$ est donc homotope à un point dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{S, N\}$. Il en est alors de même de la courbe γ qui est donc homotope à un point dans A .

De plus C_1 est une composante connexe de $\mathbb{S}^2 \setminus h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$ qui ne contient ni N ni S . Son adhérence est $C_1 \cup \gamma(\mathbb{T}^1)$. Elle est donc relativement compacte dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{S, N\}$. Par conséquent $h^{-1}(C_1)$ est une composante connexe de $\mathbb{A} \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ relativement compacte. L'autre composante connexe est $h^{-1}(C_2 \setminus \{N; S\})$ qui n'est pas relativement compacte.

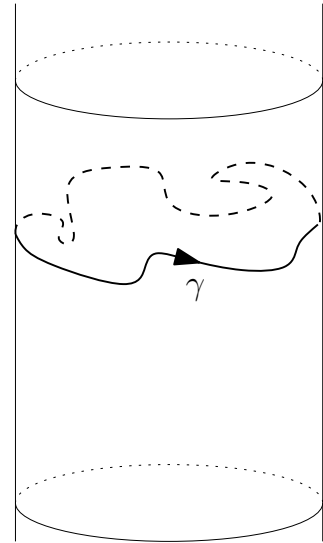
2. Le pôle N appartient à l'une des composantes (C_1 par exemple) et le pôle S appartient à l'autre. Dans ce cas les composantes connexes de $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ sont $h^{-1}(C_1 \setminus \{N\})$ et $h^{-1}(C_2 \setminus \{S\})$ lesquels sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 privé d'un point c'est-à-dire à l'anneau \mathbb{A} . De plus, d'après [Nm92] P195, la courbe $h \circ \gamma$ n'est pas homotope à un point dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{N; S\}$ ce qui implique que γ n'est pas homotope à un point dans A .

Les adhérences de $C_1 \setminus \{N\}$ et de $C_2 \setminus \{S\}$ dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{N; S\}$ sont respectivement égales à $C_1 \setminus \{N\} \cup \gamma(\mathbb{T}^1)$ et à $C_2 \setminus \{S\} \cup \gamma(\mathbb{T}^1)$ qui ne sont pas compactes car ce ne sont pas fermés de \mathbb{S}^2 . Les composantes connexes $h^{-1}(C_1 \setminus \{N\})$ et $h^{-1}(C_2 \setminus \{S\})$ de $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ ne sont donc pas relativement compactes.

Dans les deux cas, $h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$ est la frontière commune de C_1 et C_2 . Par conséquent $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est la frontière commune des deux composantes connexes de $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ qui sont les images par h^{-1} de C_1 et C_2 privées de N et S . □



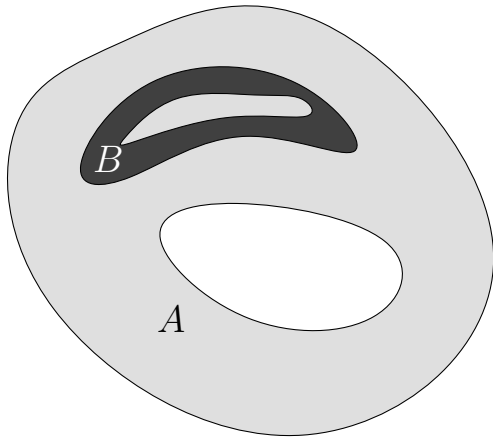
γ est une courbe homotope a un point.



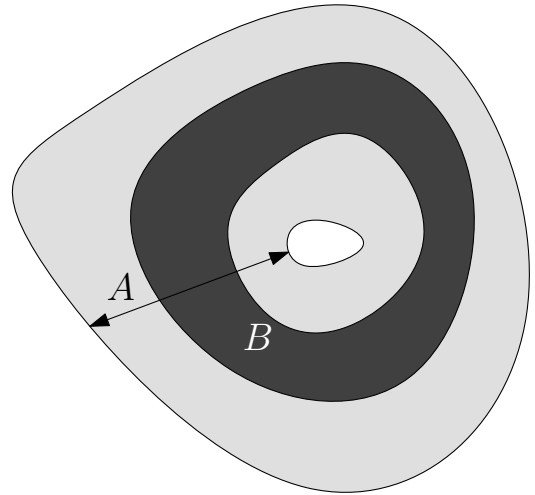
γ est une courbe essentielle.

PROPOSITION ET DÉFINITION 2.21. — Soit A et B deux anneaux tels que $B \subseteq A$. Il y a deux cas :

1. Les courbes essentielles de B sont homotopes à un point dans l'anneau A .
2. Les courbes essentielles de B sont aussi des courbes essentielles de A . Dans ce cas, on dit que B est un sous anneau essentiel de A .



Premier cas



Second cas : B est un sous anneau essentiel de A

PROPOSITION 2.22. — Soit A un anneau et B une partie de A .

1. Si B est un anneau relativement compact dans A alors $B \setminus A$ possède exactement deux composantes connexes.
2. Si de plus B est un sous anneau essentiel de A alors les deux composantes connexes de $B \setminus A$ sont d'intérieur non vide.

Démonstration. — Montrons tout d'abord le premier point. D'après la remarque 2.2, l'anneau A est homéomorphe à $\mathbb{S}^2 \setminus \{S; N\}$. Considérons donc un homéomorphisme $\phi : A \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S; N\}$. Le nombre de composantes connexes de $A \setminus B$ est égal au nombre de composantes connexes de $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S; N\}) \setminus \phi(B)$. D'après la proposition 2.8, $\mathbb{S}^2 \setminus \phi(B)$ possède exactement deux composantes connexes C_1 et C_2 . L'anneau B étant relativement compact dans A , $\phi(\overline{B})$ est un compact inclus dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{S; N\}$. Ainsi N et S appartiennent à l'ouvert $\mathbb{S}^2 \setminus \phi(\overline{B})$ qui est lui même inclus dans $C_1 \cup C_2$. Par conséquent N et S appartiennent à l'intérieur de C_1 ou de C_2 . Or :

LEMME 2.23. — Soit C une partie connexe de la sphère \mathbb{S}^2 . Si x appartient à l'intérieur de C alors $C \setminus \{x\}$ est connexe.

Terminons la démonstration de la proposition 2.22 avant de donner une preuve de ce lemme.

Il y a deux cas :

- les pôles N et S appartiennent à deux composantes connexes distinctes. Par exemple $N \in C_1$ et $S \in C_2$. Comme N et S appartiennent respectivement à l'intérieur de C_1 et C_2 , d'après le lemme ci-dessus, $C_1 \setminus \{N\}$ et $C_2 \setminus \{S\}$ sont connexes. Ce sont donc les deux composantes connexes de $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S; N\}) \setminus \phi(B)$.
- les pôles N et S appartiennent à la même composante connexe, C_1 par exemple. Il suffit d'appliquer deux fois le lemme 2.23, une fois pour démontrer que $C_1 \setminus \{N\}$ est connexe, une seconde fois pour démontrer que $(C_1 \setminus \{N\}) \setminus \{S\} = C_1 \setminus \{N; S\}$ est encore connexe. L'ensemble $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S; N\}) \setminus \phi(B)$ possède alors deux composantes connexes qui sont $C_1 \setminus \{N; S\}$ et C_2 .

L'ensemble $A \setminus B$ possède donc bien deux composantes connexes.

Venons en au second point. Nous allons procéder par contraposée. Supposons que l'une des composantes connexes de $A \setminus B$ est d'intérieur vide, nous allons montrer que B n'est pas un sous anneau essentiel de A .

Comme l'une des composantes de $A \setminus B$ est d'intérieur non vide, il en est de même de l'une des composantes connexes de $\mathbb{S}^1 \setminus \phi(B)$. Supposons que c'est C_1 qui est la composante connexe d'intérieur vide de $\mathbb{S}^2 \setminus \phi(B)$. Comme N et S appartiennent à l'intérieur de $\mathbb{S}^2 \setminus \phi(B)$, ces deux points appartiennent donc à C_2 . Ainsi $C_1 \cup \phi(B)$ est inclus dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{N; S\}$. Or, l'ensemble $C_1 \cup \phi(B)$ étant égal à $\mathbb{S}^2 \setminus C_2$, il est "le complémentaire d'une composante connexe du complémentaire d'un connexe". Ainsi d'après le théorème 3.3 page 78 de [Nm92], il est connexe. Mais C_2 est un fermé connexe de la sphère. Par conséquent d'après la proposition 2.5, les composantes connexes de son complémentaire sont simplement connexes. L'ensemble $C_1 \cup \phi(B)$ est donc simplement connexe. En réunissant ceci avec le fait qu N et S n'appartiennent pas à $C_1 \cup \phi(B)$, nous obtenons que B est inclus dans un ouvert simplement connexe de A qui est $\phi^{-1}(C_1 \cup \phi(B))$. Les courbes essentielles de B ne sont donc pas essentielles dans A . L'anneau B n'est donc pas un sous anneau essentiel de A .

Pour achever la démonstration de la proposition, il reste à démontrer le lemme ci-dessus.

Preuve du lemme 2.23. — Soit $r > 0$, notons $D(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| < r\}$ et $\overline{D(x, r)} = \{y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| \leq r\}$.

Fixons $r > 0$ tel que $H_2^{-1}(\overline{D(x, r)})$ est inclus dans C . Posons $O = H_2^{-1}(D(x, r))$. C'est un ouvert homéomorphe au plan contenant x dont l'adhérence est contenue dans C et dont la frontière est connexe.

• L'ensemble $C \setminus O$ est connexe :

Soit O_1 et O_2 deux ouverts de la sphère tels que $C \setminus O \subseteq (O_1 \cup O_2)$ et tels que $O_1 \cap O_2$ est inclus dans le complémentaire de $C \setminus O$.

L'adhérence de O étant incluse dans C et O étant ouvert, la frontière de O est contenue dans $C \setminus O$. Or la frontière de O est connexe, elle est donc contenue dans O_1 par exemple et ne rencontre pas O_2 . Ainsi l'ensemble $O_2 \setminus O = O_2 \setminus \overline{O}$ est ouvert.

Par conséquent C est contenu dans l'union des deux ouverts $O_1 \cup O$ et $O_2 \setminus O$. Or d'une part C est connexe, d'autre part $(O_1 \cup O) \cap C$ est non vide car il contient O . Donc $O_2 \setminus O$ ne rencontre pas C . Ce qui signifie que $O_2 \cap (C \setminus O)$ est vide. D'où la connexité de $C \setminus O$.

• L'ensemble $\overline{O} \setminus \{x\}$ est connexe :

L'ensemble $O \setminus \{x\}$ est connexe car il est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, O étant homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

Or

$$O \setminus \{x\} \subseteq \overline{O} \setminus \{x\} \subseteq \overline{O \setminus \{x\}}.$$

Or si A est connexe, tout ensemble compris entre A et l'adhérence de A est connexe. D'où la connexité de $\overline{O} \setminus \{x\}$.

En utilisant les deux points ci-dessus, on obtient que $C \setminus \{x\} = (C \setminus O) \cup (\overline{O} \setminus \{x\})$ est l'union de deux connexes dont l'intersection est non vide puisqu'elle contient la frontière de O . Donc $C \setminus \{x\}$ est connexe. ■

□

2.6 Homéomorphismes préservant l'orientation, surface orientable

• Homéomorphisme de \mathbb{R}^2 préservant l'orientation

Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et γ une courbe fermée simple du plan tels que $x \in \text{int}(\gamma)$.

Soit h un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 . Considérons la courbe fermée simple $h \circ \gamma$. Comme $h(x) \in \text{int}(h \circ \gamma) = h(\text{int}(\gamma))$, il existe d'après le théorème de Jordan $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\text{ind}(h(x), h \circ \gamma) = \varepsilon \text{ind}(x, \gamma).$$

Cet entier ε ne dépend pas de la courbe γ tel que $x \in \text{int}(\gamma)$ par invariance de l'indice par homotopie (cf. la définition - propriété 2.13).

On a de plus $\text{ind}(x, \gamma) = \text{ind}(x', \gamma)$ pour tout $x' \in \text{int}(\gamma)$. Par conséquent la fonction $x \mapsto \varepsilon$ est localement constante donc constante sur \mathbb{R}^2 .

DÉFINITION 2.24. — On dit que h **présERVE l'orientation** si la fonction $x \mapsto \varepsilon$ est égale à 1 sur \mathbb{R}^2 . Sinon on dit que h **renVERSE l'orientation**.

On peut étendre cette définition au cas d'un homéomorphisme entre deux ouverts connexes U et V de \mathbb{R}^2 . Pour $x \in U$, on considère $a > 0$ assez petit pour que $B(x, a) \subseteq U$ puis on procède comme ci-dessus en considérant les courbes γ fermées simples telles que $x \in \text{int}(\gamma) \subseteq B(x, a)$.

• Surface topologique orientable

Soit M une surface topologique.

Soit \mathcal{A} un atlas de M . On dit que \mathcal{A} est un atlas orienté au sens topologique si pour toutes cartes (U, h) et (V, k) de cet atlas, l'application $h \circ k^{-1} : k(U \cap V) \rightarrow h(U \cap V)$ est un homéomorphisme qui préserve l'orientation.

Si pour la surface M un tel atlas existe, on dit que M est orientable.

Soit \mathcal{A} et \mathcal{A}' deux atlas orientés. Les deux atlas \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont équivalents si pour toutes cartes (U, h) et (V, k) appartenant respectivement à \mathcal{A} et \mathcal{A}' , l'application $h \circ k^{-1} : k(U \cap V) \rightarrow h(U \cap V)$ est un homéomorphisme qui préserve l'orientation.

Une **orientation** de M est une classe d'équivalence d'atlas orientés.

Si M est une surface connexe orientable, **orienter** M c'est choisir une classe d'équivalence d'atlas orientés de M . Dans ce cas on dit que M est orientée.

PROPOSITION 2.25. — Si M est une surface topologique orientable connexe alors M admet deux orientations possibles.

PROPOSITION 2.26. — Si (M, ω) est une surface symplectique alors M est une surface topologique orientable au sens topologique.

Preuve rapide. — La surface M étant symplectique, elle est orientable au sens différentiable c'est-à-dire qu'il existe un atlas de cartes différentiables dont les changements de cartes ont un jacobien positif. Or d'après [Nm92], un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^2 dont le jacobien est positif, préserve l'orientation au sens topologique. La surface M est donc orientable au sens topologique. ■

• **Homéomorphisme d'une surface orientée préservant l'orientation**

DÉFINITION 2.27. — Soit M une surface topologique orientée et f un homéomorphisme de M . On dit que f préserve l'orientation si pour tout atlas orienté \mathcal{A} , l'atlas $\{(U, f \circ h) | (U, h) \in \mathcal{A}\}$ appartient à la classe d'équivalence d'atlas orientés définie par \mathcal{A} .

REMARQUE 2.28. — Un homéomorphisme f préserve l'orientation dès qu'il existe un atlas \mathcal{A} tel que \mathcal{A} et l'atlas $\{(U, f \circ h) | (U, h) \in \mathcal{A}\}$ définissent la même classe d'atlas orientés.

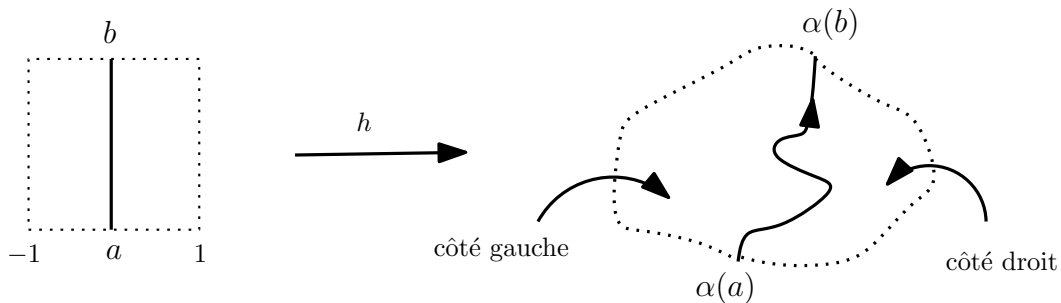
REMARQUE 2.29. — Soit (M, ω) une surface symplectique et f un difféomorphisme symplectique de M alors f préserve l'orientation au sens topologique.

2.7 Arcs et courbes orientés

• **Côté gauche et côté droit d'un arc du plan**

Soit $I =]a; b[$ un intervalle de \mathbb{R}^2 . Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc continu.

Soit U un voisinage de $\alpha(I)$. On peut définir le côté gauche et le côté droit de $\alpha(I)$ dans U . Pour cela, on prolonge α à l'aide du théorème 2.19 (qui est, rappelons le, une conséquence du théorème de Schoenflies), en un plongement ouvert $h :]a; b[\times]-1; 1[\rightarrow M$ à valeurs dans U , préservant l'orientation et tel que $h(t, 0) = \alpha(t)$ pour tout $t \in]a; b[$. La région $h(]a; b[\times]0; 1[)$ est le côté droit de (α, I) dans U alors que la région $h(]a; b[\times]-1; 0[)$ est le côté gauche de (α, I) dans U .

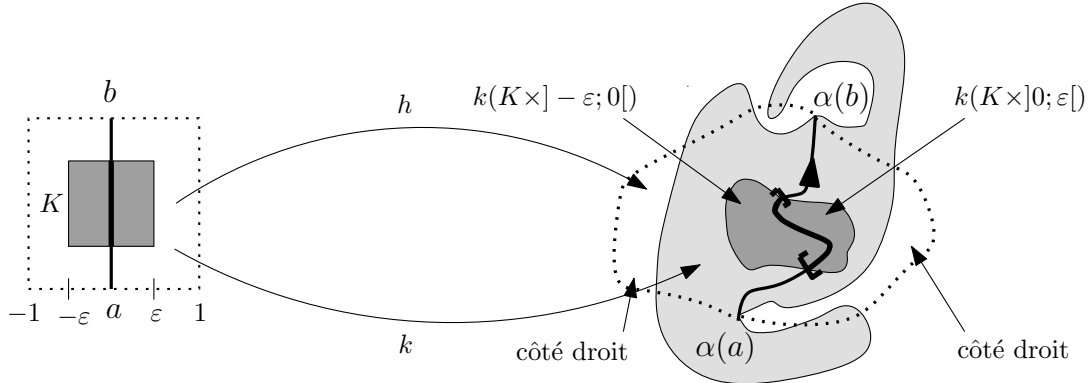


On peut vérifier que si k est un autre prolongement de α préservant l'orientation, les notions de gauche et de droite définies à l'aide de k coïncident avec celles définies à l'aide de h dans le sens où

si K est un compact de $]a; b[$ et ε est un réel strictement positif qui vérifient que $k(K \times] - \varepsilon; \varepsilon[)$ est inclus dans $h(]a; b[\times] - 1; 1[)$ alors :

$$k(K \times] - \varepsilon; 0[) \subseteq h(]a; b[\times] - 1; 0[),$$

$$k(K \times]0; \varepsilon[) \subseteq h(]a; b[\times]0; 1[).$$



De plus si $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ est tel que $\beta(J) = \alpha(I)$ et tel que $\alpha^{-1} \circ \beta : J \rightarrow I$ est un homéomorphisme croissant alors les côtés gauches et les côtés droits de (α, I) et (β, J) coïncident.

• Côté gauche et côté droit d'une courbe fermée simple d'une surface

Soit M une surface topologique orientée.

Tout d'abord généralisons au cas d'un arc continu inclus dans une carte de M .

Soit (U, h) une carte de M telle que $h : U \subseteq M \rightarrow h(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme qui préserve l'orientation et $\alpha : I \rightarrow M$ un arc continu.

D'après ce qui a été ci-dessus à propos de la gauche et de la droite d'un arc, on sait ce qu'est le côté gauche et le côté droit de $(h \circ \alpha, I)$. Le côté gauche et le côté droit de (α, I) sont alors respectivement les images réciproques du côté gauche et du côté droit de $(h \circ \alpha, I)$.

On peut vérifier que le côté gauche et le côté droit de (α, I) ainsi définis ne dépendent pas de l'homéomorphisme h pourvu qu'il préserve l'orientation.

Soit $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple.

Soit $(U_i, h_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ une famille finie de cartes et $(a_i; b_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ étant une famille de couples de points du cercle :

- $\forall i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, U_i \cap \gamma(\mathbb{T}^1) = \gamma(]a_i; b_i[)$,
- les $h_i : U_i \rightarrow h_i(U_i)$ sont des homéomorphismes préservant l'orientation,
- $\gamma(\mathbb{T}^1) \subseteq U = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} U_i$.

La gauche (respectivement la droite) de γ dans U est alors l'union des côtés gauches (respectivement des côtés droits) des arcs $(\gamma,]a_i; b_i[)$.

Cette définition de gauche et de droite d'une courbe fermée simple ne dépend pas des cartes (U_i, h_i) pourvu que les applications h_i préservent l'orientation.

De plus si $\gamma' : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ est une courbe fermée simple telle que $\gamma'(\mathbb{T}^1) = \gamma(\mathbb{T}^1)$ et $\gamma^{-1} \circ \gamma'$ est un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation alors les côtés gauches et les côtés droits de γ et de γ' coïncident.

REMARQUE 2.30. — Si f est un homéomorphisme de M qui préserve l'orientation et $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ est une courbe fermée simple, l'image par f de la gauche (respectivement de la droite) de γ est la gauche (respectivement la droite) de $f \circ \gamma$.

• Courbe fermée simple invariante par un homéomorphisme

Soit M une surface.

Soit $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple et f un homéomorphisme de M .

- On dit que f **laisse invariante la courbe** γ ou que la courbe γ est invariante par f si $f(\gamma(\mathbb{T}^1)) = \gamma(\mathbb{T}^1)$.
- Si γ est une courbe invariante par f , l'application f **présERVE l'orientation de la courbe** γ si $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$ est un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation. Dans le cas contraire, l'application f renverse l'orientation de la courbe γ .

REMARQUE 2.31. — Soit f un homéomorphisme de M et $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple invariante par f . L'application $f^2 = f \circ f$ préserve toujours l'orientation de la courbe γ .

REMARQUE 2.32. — Si f est un homéomorphisme de M qui préserve l'orientation et $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ est une courbe fermée simple invariante par f sur laquelle f préserve l'orientation, la gauche (respectivement de la droite) de $f \circ \gamma$ coïncide avec la gauche (respectivement la droite) de γ .

Voici un résultat que l'on obtient très facilement à partir de la proposition 1.5 :

PROPOSITION 2.33. — *Soit M une surface et f un homéomorphisme de M . Soit $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple invariante par f . Si f préserve l'orientation de γ et si f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ alors tous les points périodiques de f sur cette courbe admettent la même période.*

Démonstration. — L'application f préserve l'orientation de γ et possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$. Par conséquent, l'application $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$ est un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation et possède des points périodiques. D'après la proposition 1.5, tous les points périodiques de $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$ ont la même période. Il en est donc de même pour les points périodiques de f appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$. □

De la même façon, on déduit de la proposition 1.6, le résultat suivant :

PROPOSITION 2.34. — *Soit M une surface et f un homéomorphisme de M . Soit $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple invariante par f . Si f renverse l'orientation de γ alors f possède exactement deux points fixes sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$. De plus, les points périodiques de f sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ sont ou des points fixes ou des points de période 2.*

Démonstration. — Comme f renverse l'orientation de la courbe γ , l'application $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$ est un homéomorphisme du cercle renversant l'orientation.

D'après la proposition 1.6 cette application possède exactement deux points fixes et ses points périodiques sont ou des points fixes ou des points de périodes 2. Il en est donc de même pour l'application f sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$. \square

• Etude des images des composantes connexes du complémentaire d'une courbe fermée simple d'une surface par un homéomorphisme d'une surface préservant l'orientation

Soit f un homéomorphisme du plan et $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple invariante par f .

Le théorème de Jordan nous assure que $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède exactement deux composantes connexes dont l'une est relativement compacte l'autre non. Par conséquent ces composantes connexes sont chacune invariante par f .

Ce raisonnement ne convient plus dans le cadre de la sphère ou dans le cadre de l'anneau lorsque γ n'est pas une courbe essentielle.

EXEMPLE 2.35. Considérons la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Soit f la symétrie par rapport au plan d'équation $z = 0$, f est un homéomorphisme de la sphère. Considérons la courbe γ fermée simple de la sphère définie par

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{T}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ \theta &\longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \end{aligned}$$

Les deux composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ sont $C_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z > 0\}$ et $C_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z < 0\}$.

La courbe γ est invariante par f et les deux composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ sont échangées par f .

EXEMPLE 2.36. Considérons l'anneau $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1\}$.

Soit f la symétrie par rapport au plan d'équation $z = 0$, f est un homéomorphisme de l'anneau. Considérons la courbe γ fermée simple de l'anneau A définie par

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{T}^1 &\longrightarrow A \\ \theta &\longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \end{aligned}$$

Les deux composantes connexes de $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ sont $C_+ = \{(x, y, z) \in A \mid z > 0\}$ et $C_- = \{(x, y, z) \in A \mid z < 0\}$.

La courbe γ est une courbe essentielle de A invariante par f et les deux composantes connexes de $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ sont échangées par f .

On peut se demander ce que l'on doit supposer sur l'homéomorphisme f pour s'assurer que f préserve les composantes connexes du complémentaire d'une courbe.

Remarquons que dans les deux exemples traitées ci-dessus, $f \circ \gamma = \gamma$. Le côté gauche et le côté droit de γ coïncide respectivement avec le côté gauche et le côté droit de $f \circ \gamma$. Or C_+ [respectivement C_-] est la composante connexe de $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ ($M = \mathbb{S}^2$ ou A) qui contient le côté gauche [respectivement droit] de γ . Comme f échange C_+ et C_- , f envoie le côté gauche sur le côté droit de la courbe γ . D'après la remarque 2.30, f ne préserve pas l'orientation de la surface.

En réunissant les remarques 2.30 et 2.32, on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 2.37. — *Soit M une surface orientée et f un homéomorphisme de M préservant l'orientation. Soit $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple invariante par f sur laquelle f préserve l'orientation.*

Si $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède deux composantes connexes dont $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est la frontière commune alors f préserve chacune de ces composantes connexes.

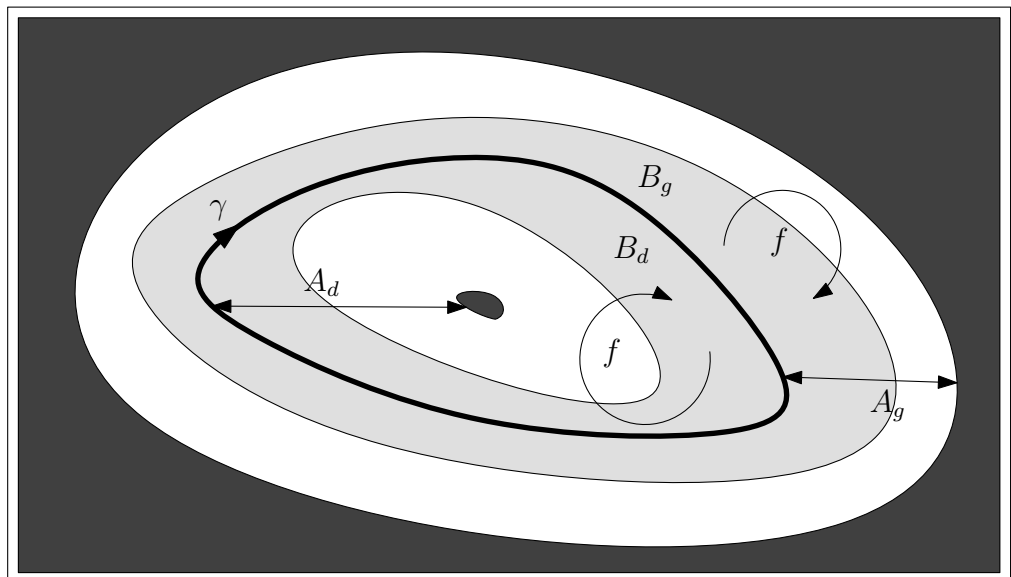
Plus précisément voici ce que l'on obtient en utilisant un anneau voisinage d'une courbe γ et pour lequel γ est une courbe essentielle.

Notation : Soit γ une courbe fermée simple d'un anneau A . L'ensemble $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède deux composantes connexes, l'une correspond au côté droit l'autre au côté gauche de la courbe γ . Notons A_d la composante à droite de γ et A_g la composante à gauche de γ .

PROPOSITION 2.38. — *Soit M une surface orientée et f un homéomorphisme de M préservant l'orientation. Soit $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple invariante par f sur laquelle f préserve l'orientation.*

Soit A et B deux anneaux inclus dans M voisinages de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ tels que B est un sous anneau essentiel de A . On suppose que γ est une courbe essentielle de B (et donc de A) et que $f(B) \subseteq A$.

Alors $f(B_d) \subseteq A_d$ et $f(B_g) \subseteq A_g$.



$$f(B_g) \subseteq A_d$$

$$f(B_d) \subseteq A_g$$

REMARQUE 2.39. — Tous les résultats énoncés ci-dessus pour des homéomorphismes d'une surface préservant l'orientation sont vrais pour des difféomorphismes symplectiques d'une surface symplectique, puisque d'après la remarque 2.29 un difféomorphisme symplectique préserve l'orientation au sens topologique.

3 Construction d'une famille dénombrable d'anneaux constituant une base de voisinages d'une courbe simple quelconque sur une surface orientable.

Soit M une surface topologique orientée.

Le but de cette partie est de construire une famille dénombrable d'anneaux inclus dans M telle que pour toute courbe γ fermée simple de la surface et pour tout voisinage U de $\gamma(\mathbb{T}^1)$, il existe un anneau de cette famille dont γ est une courbe essentielle et qui est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ inclus dans U . Voici les deux étapes de la construction :

1. Etant donné une courbe γ fermée simple et un voisinage U de $\gamma(\mathbb{T}^1)$, construire un anneau A contenu dans U dont γ est une courbe essentielle.
2. Puis à l'aide d'une triangulation de la surface, construire une famille dénombrable d'anneaux dont nous montrerons pour une courbe fermée simple quelconque, en nous plaçant dans un anneau construit à la première étape, qu'elle forme une base dénombrable d'anneaux.

3.1 Construction d'un anneau voisinage d'une courbe simple

THÉOREME 3.1. — Soit M une surface topologique orientée, $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple et U un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$. Il existe A un ouvert homéomorphe à l'anneau \mathbb{A} inclus dans U contenant $\gamma(\mathbb{T}^1)$ et pour lequel γ est une courbe essentielle.

Démonstration. — En utilisant le principe décrit au paragraphe §2.5 pour définir le côté gauche et le côté droit d'un arc orienté, on peut construire au voisinage d'un point θ du cercle un plongement ouvert $p_\theta : I_\theta \times]-1; 1[\rightarrow M$ préservant l'orientation tel que $p_\theta(t, 0) = \gamma(t)$ pour tout $t \in I_\theta$, I_θ étant un arc contenant θ et tel que $p_\theta(I_\theta \times]-1; 1[) \cap \gamma(\mathbb{T}^1) = \gamma(I_\theta)$.

Soit a_θ et b_θ deux points de I_θ tel que $a_\theta < \theta < b_\theta$. Posons $U_\theta = p_\theta(]a_\theta; b_\theta[\times]-1; 1[)$ puis h_θ l'homéomorphisme défini sur $]a_\theta; b_\theta[\times]-1; 1[$ à valeurs dans U_θ par $h_\theta(x) = p_\theta(x)$.

En utilisant la compacité de $\gamma(\mathbb{T}^1)$, on obtient une famille finie d'ouverts $(U_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ de M , une famille finie d'applications $(h_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ et une famille de couples de points du cercle $(a_i, b_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$, telles que :

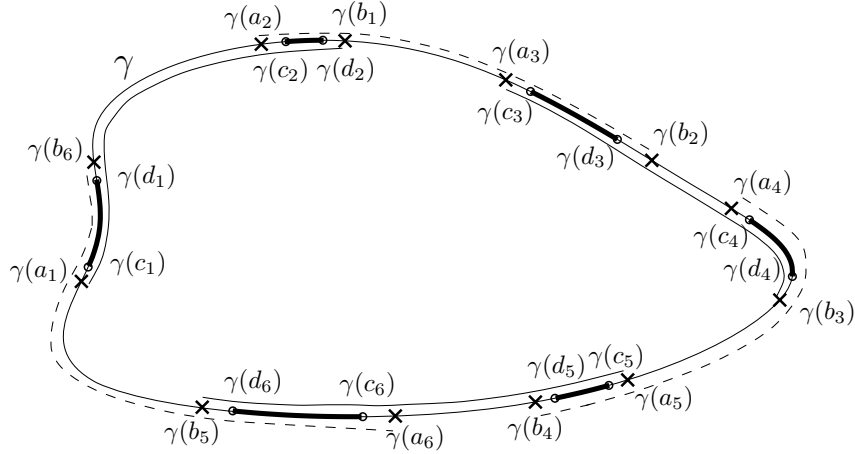
- h_i est un homéomorphisme de $]a_i; b_i[\times]-1; 1[$ sur U_i préservant l'orientation,
- $h_i(\theta, 0) = \gamma(\theta)$, pour tout $\theta \in]a_i; b_i[\times \{0\}$.

De plus, quitte à réordonner les a_i et le b_i et à en supprimer certains, on peut supposer $a_i < b_{i-1} < a_{i+1}$.

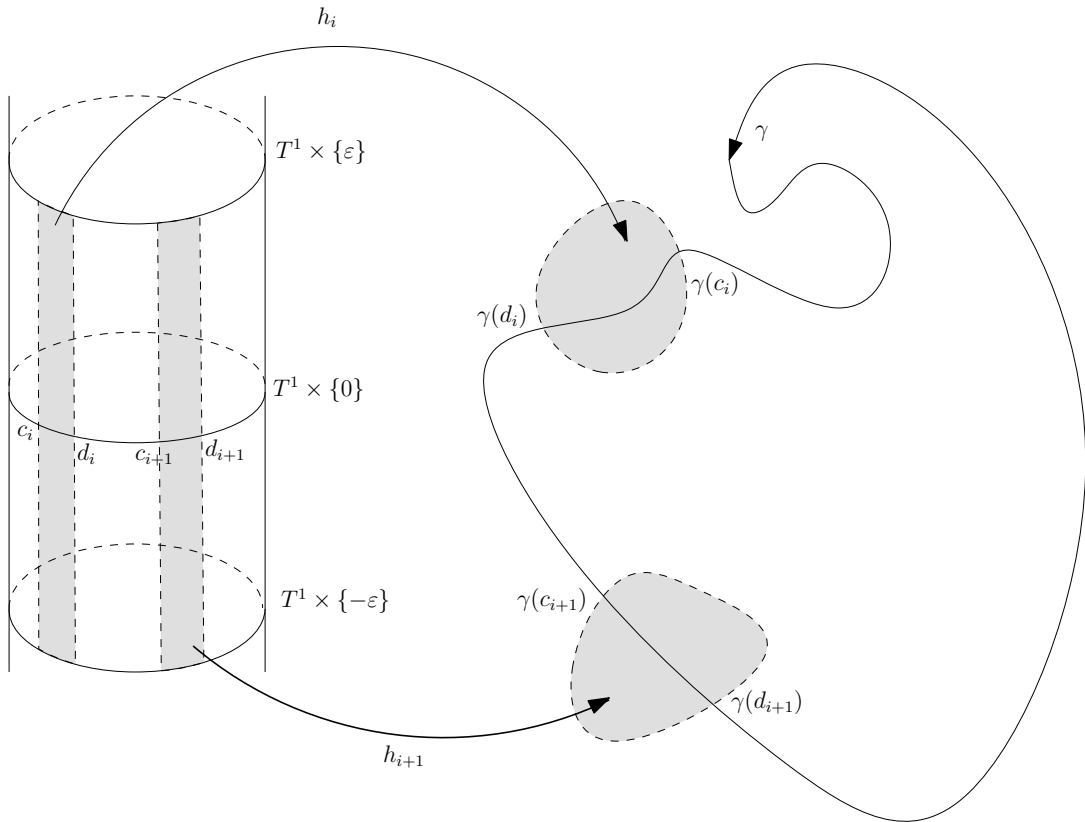
Soit c_i, d_i des points du cercle tels que $a_i < c_i < d_i < b_{i-1}$. Ainsi les $\gamma([c_i; d_i])$, $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints et inclus dans $U_i \cap U_{i-1}$. Or pour tout $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\gamma([c_i; d_i]) = h_i([c_i; d_i] \times \{0\})$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :

- pour tout $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $h_i([c_i; d_i] \times [-\varepsilon; \varepsilon]) \subseteq U_i \cap U_{i-1}$,
- les compacts $h_i([c_i; d_i] \times [-\varepsilon; \varepsilon])$, $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints.



Nous disposons d'une famille de plongements $h_i :]c_i; d_i[\times]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow M$ dont les images sont des voisinages de chaque $\gamma([c_i; d_i])$ et telle que $\gamma(t) = h(t, 0)$ sur $\forall t \in]c_i; d_i[$.



Le problème est de “recoller” les h_i pour obtenir un plongement $h : \mathbb{T}^1 \times]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow M$ (peut être en réduisant ε) dont l’image est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ et qui coïncide avec γ sur $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ (au sens où $h(\theta, 0) = \gamma(\theta)$, $\forall \theta \in \mathbb{T}^1$).

Il suffira alors de poser :

$$A = h(\mathbb{T}^1 \times]-\varepsilon; \varepsilon[).$$

L’ensemble A est alors un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1) = h(\mathbb{T} \times \{0\})$ homéomorphe à \mathbb{A} . La courbe γ est une courbe essentielle de A puisqu’elle est l’image par h de la courbe essentielle $\theta \in \mathbb{T}^1 \mapsto (\theta, 0)$ de $\mathbb{T}^1 \times]-\varepsilon; \varepsilon[$.

Fixons $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et plaçons nous dans $[a_i; b_i] \times [-1; 1]$.

Remarquons que par construction de c_{i+1} , d_{i+1} , et ε , les deux connexes $[c_i; d_i] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$ et $h_i^{-1} \circ h_{i+1}([c_{i+1}; d_{i+1}] \times [-\varepsilon; \varepsilon])$ sont disjoints et inclus dans $]a_i; b_i[\times]-1; 1[$. Notons :

$$K_i^+ = h_i^{-1} \circ h_{i+1}([c_{i+1}; d_{i+1}] \times [0; \varepsilon]),$$

$$K_i^- = h_i^{-1} \circ h_{i+1}([c_{i+1}; d_{i+1}] \times [-\varepsilon; 0]).$$

Comme h_i et h_{i+1} sont deux homéomorphismes qui préservent l’orientation, K_i^+ est inclus dans $[a_i; b_i] \times [0; 1[$ et K_i^- est inclus dans $]a_i; b_i[\times]-1; 0]$. Nous renvoyons au dessin ci-dessous pour une représentation de chacun de ces éléments.

Voici un lemme qui “recolle” l’identité sur $[c_i; d_i] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$ et $h_i^{-1} \circ h_{i+1}$ sur $[c_{i+1}; d_{i+1}] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$ dans $]a_i; b_i[\times]-1; 1[$.

LEMME 3.2. — *Il existe un homéomorphisme $\phi_i :]a_i; b_i[\times]-1; 1[\rightarrow]a_i; b_i[\times]-1; 1[$ tel que :*

- $\phi_i = id$ sur $[c_i; d_i] \times [-\varepsilon; \varepsilon] \cup]a_i; b_i[\times \{0\}$,
- $\phi_i = h_i^{-1} \circ h_{i+1}$ sur $[c_{i+1}; d_{i+1}] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$.

Terminons la construction de l’homéomorphisme h avant de donner une preuve de ce lemme, preuve qui s’appuie sur le théorème de Schoenflies.

Posons $H_i :]a_i; b_i[\times]-1; 1[\rightarrow U_i$ défini par $H_i = h_i \circ \phi_i$.

L’application H_i est un homéomorphisme qui coïncide avec h_i sur $[c_i; d_i] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$ et avec h_{i+1} sur $[c_{i+1}; d_{i+1}] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$. Remarquons que H_i restreinte à $]a_i; b_i[\times \{0\}$ coïncide avec $\gamma|_{]a_i; b_i[}$.

Posons $h : \mathbb{T}^1 \times]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow M$ défini par $h(x) = H_i(x)$ si $x \in [d_i; d_{i+1}] \times]-\varepsilon; \varepsilon[$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. L’application h est définie et continue car $H_i = h_i$ sur $\{d_i\} \times]-\varepsilon; \varepsilon[$ et $H_i = h_{i+1}$ sur $\{d_{i+1}\} \times]-\varepsilon; \varepsilon[$. De plus elle coïncide avec γ sur $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$.

En outre h est une application ouverte car h coïncide au voisinage de tout point de $\mathbb{T}^1 \times]-\varepsilon; \varepsilon[$ avec un homéomorphisme entre un ouvert de $\mathbb{T}^1 \times]-\varepsilon; \varepsilon[$ et un ouvert de $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} U_i$.

Pour que h soit un plongement, il manque le fait que h soit injective ce que nous allons obtenir en réduisant son ensemble de définition.

Soit $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, les arcs $h([d_i; c_{i+1}] \times \{0\}) = \gamma([d_i; c_{i+1}])$ et $h([d_{i+1}; c_i] \times \{0\}) = \gamma([d_{i+1}; c_i])$ sont des compacts disjoints. Il existe donc un réel ε' , $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

$$h([d_i; c_{i+1}] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[) \cap h([d_{i+1}; c_i] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[) = \emptyset. \quad (\star)$$

Soit donc x et y deux points de $\mathbb{T}^1 \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[$ tels que $h(x) = h(y)$. En utilisant (\star) et le fait que les $h([c_i; d_i] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[)$ $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont deux à deux disjoints (car h restreinte à $[c_i; d_i] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[$ coïncide

avec h_i), nous allons vérifier qu'il existe $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que x et y appartiennent $[c_k; d_{k+1}] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$. Or sur cet ensemble h coïncide avec H_k laquelle est injective. Donc $x = y$. Par conséquent, h restreinte à $\mathbb{T} \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$ est injective.

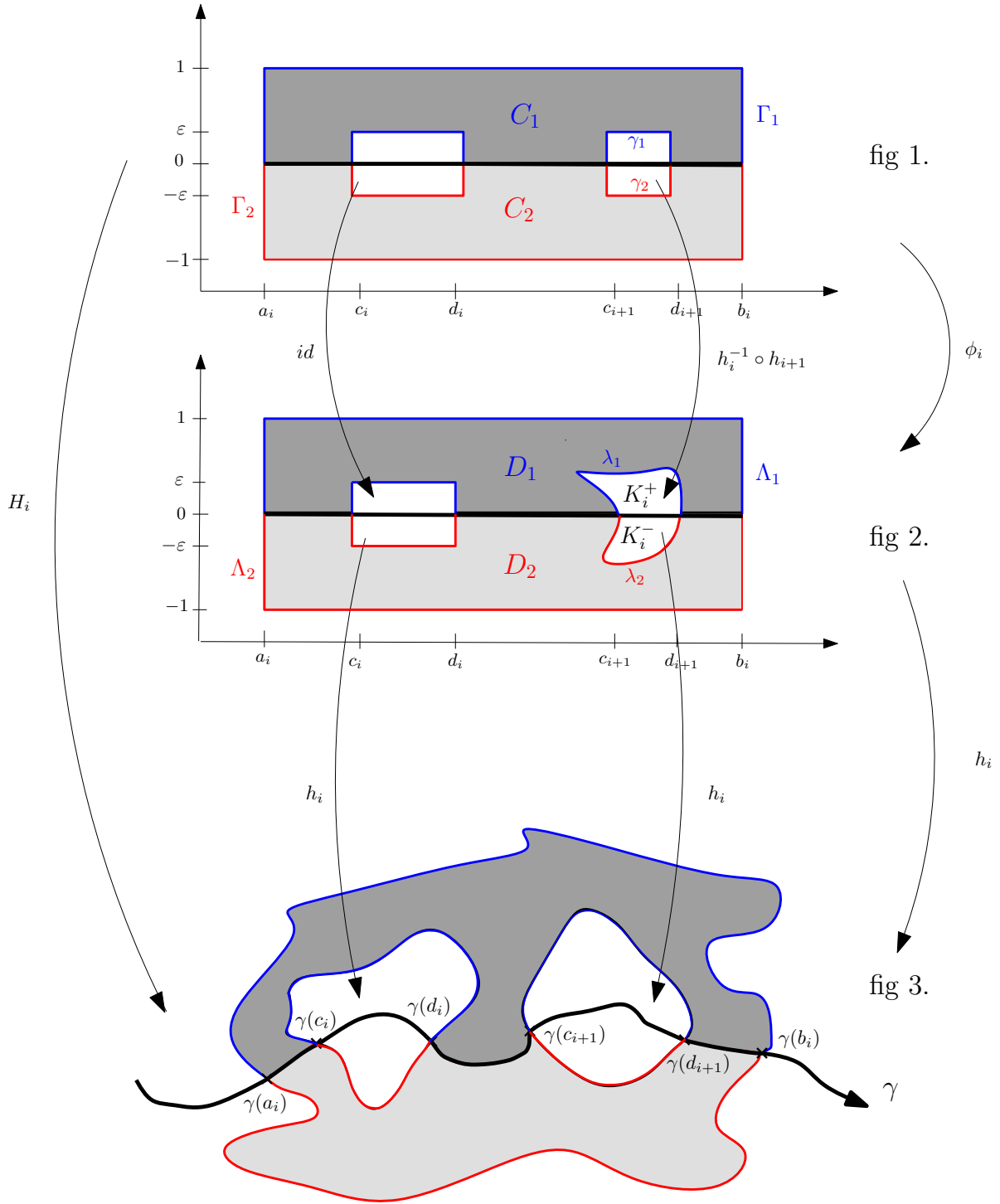
Démontrons donc qu'il existe $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que x et y appartiennent à $[c_k; d_{k+1}] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$. Il y a deux cas :

1. Il existe k et j dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $x \in [c_k; d_k] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$ et $y \in [c_j; d_j] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$. Or les ensembles $h([c_k; d_k] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$ et $h([c_j; d_j] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$ sont disjoints si $k \neq j$. Or $h(x) = h(y)$ donc $k = j$. Par conséquent x et y appartiennent tous les deux à $[c_k; d_k] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$ et donc à $[c_k; d_{k+1}] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$.
2. Il existe k dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que x (ou y) appartient à $[d_k; c_{k+1}] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$. D'après (\star) , y n'appartient pas à $[d_{k+1}; c_k] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$. Par conséquent $y \in [c_k; d_{k+1}] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$. Là aussi x et y appartiennent tous les deux à $[c_k; d_{k+1}] \times]-\varepsilon'; \varepsilon'[-$.

Reste donc à donner une preuve du lemme ci-dessus.

Preuve du lemme 3.2. — Reprenons le schéma ci-dessous.

- Soit Γ_1 la frontière de l'ouvert C_1 en gris foncé sur la figure 1 du schéma ci-dessous et γ_1 l'arc formé par de la frontière de $[c_{i+1}; d_{i+1}] \times [0; \varepsilon]$ inclus dans C_1 . (fig 1.)
- Soit Γ_2 la frontière de l'ouvert C_2 en gris clair sur la figure 1 du schéma ci-dessous et γ_2 l'arc formé par la frontière de $[c_{i+1}; d_{i+1}] \times [-\varepsilon; 0]$ inclus dans C_2 . (fig 1.)
- Soit Λ_1 la frontière de l'ouvert D_1 en gris foncé sur la figure 1 du schéma ci-dessous et λ_1 l'arc formé par la frontière de K_i^+ inclus dans D_1 . (fig 2.)
- Soit Λ_2 la frontière de l'ouvert D_2 en gris clair sur la figure 1 du schéma ci-dessous et λ_2 l'arc formé par la frontière de K_i^- inclus dans D_2 . (fig 2.)



Posons $\alpha_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Lambda_1$ défini par $\alpha_1 = \text{id}$ sur $\Gamma_1 \setminus \gamma_1$ et $\alpha_1 = h_i^{-1} \circ h_{i+1}$ sur γ_1 .
D'après la version 2.18 du théorème de Schoenflies, il existe $\tilde{\alpha}_1 : C_1 \rightarrow D_1$ un homéomorphisme tel que $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1$ sur Γ_1 .

Posons $\alpha_2 : \Gamma_2 \rightarrow \Lambda_2$ défini par $\alpha_2 = \text{id}$ sur $\Gamma_2 \setminus \gamma_2$ et $\alpha_2 = h_i^{-1} \circ h_{i+1}$ sur γ_2 .
D'après la version 2.18 du théorème de Schoenflies, il existe $\tilde{\alpha}_2 : C_2 \rightarrow D_2$ un homéomorphisme tel

que $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2$ sur Γ_2 .

Remarquons que $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \text{id}$ sur $C_1 \cap C_2 = ([a_i; c_i] \cup [d_i; c_{i+1}] \cup [d_{i+1}; b_i]) \times \{0\}$ et sur la frontière de $[a_i; b_i] \times [-1; 1]$.

Posons :

$$\alpha : C_1 \cup C_2 \longrightarrow C_1 \cup C_2$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \alpha_1(x) & \text{si } x \in C_1 \\ \alpha_2(x) & \text{si } x \in C_2. \end{cases}$$

L'application α est un homéomorphisme de $C_1 \cup C_2$ tel que :

- $\alpha = \text{id}$ sur la frontière de $[c_i; d_i] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$ et sur la frontière de $[a_i; b_i] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$,
- $\alpha = h_i^{-1} \circ h_{i+1}$ sur la frontière de $[c_{i+1}; d_{i+1}] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$.

Posons :

$$\tilde{\phi}_i : [a_i; b_i] \times [-1; 1] \longrightarrow [a_i; b_i] \times [-1; 1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } x \in C_1 \cup C_2 \\ x & \text{si } x \in [c_i; d_i] \times [-\varepsilon; \varepsilon] \\ h_i^{-1} \circ h_{i+1}(x) & \text{si } x \in [c_{i+1}; d_{i+1}] \times [-\varepsilon; \varepsilon]. \end{cases}$$

L'application $\tilde{\phi}_i$ est alors un homéomorphisme de $[a_i; b_i] \times [-1; 1]$ qui coïncide avec l'identité sur la frontière de $[a_i; b_i] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$. Si l'on restreint $\tilde{\phi}_i$ à $]a_i; b_i[\times]-1; 1[$, on obtient un homéomorphisme de $]a_i; b_i[\times]-1; 1[$.

Considérons alors ϕ_i la restriction de $\tilde{\phi}_i$ à $]a_i; b_i[\times]-1; 1[$ à valeur dans le même ensemble. Cette application ϕ_i convient. En effet d'une part elle coïncide avec l'identité sur $[c_i; d_i] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$ par construction et sur $]a_i; b_i[\times \{0\}$ parce que :

- $\phi_i = \alpha = \text{id}$ sur $(]a_i; c_i] \cup [d_i; c_{i+1}] \cup [d_{i+1}; b_i[) \times \{0\}$,
- $\phi_i = h_i^{-1} \circ h_{i+1} = \text{id}$ sur $[c_{i+1}; d_{i+1}] \times \{0\}$, les applications h_i et h_{i+1} coïncidant toutes les deux avec γ sur $[c_{i+1}; d_{i+1}] \times \{0\}$.

D'autre part, par construction là aussi, $\phi_i = h_i^{-1} \circ h_{i+1}$ sur $[c_{i+1}; d_{i+1}] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$. ■

□

3.2 Triangulation d'une surface

Dans ce paragraphe, nous renvoyons à [Mo77] pour plus de détails et pour une preuve des résultats énoncés.

• Simplexe et complexe euclidien

Plaçons nous dans \mathbb{R}^m .

- Soit $V \subseteq \mathbb{R}^m$, V est **convexe** si quelque soit v et w deux points de V , V contient le segment $vw = \{tv + (1-t)w : t \in [0; 1]\}$.
- Soit $X \subseteq \mathbb{R}^m$, l'**enveloppe convexe** de X est le plus petit convexe au sens de l'inclusion qui contient X . C'est l'intersection de tous les convexes qui contiennent X .
- Soit $V = \{v_0, \dots, v_n\}$ un ensemble de $n + 1$ points affines indépendants de \mathbb{R}^m ($n \leq m$), l'enveloppe convexe de V , notée $v_0v_1\dots v_n$, est un **simplexe** de dimension n de \mathbb{R}^m . On note $\dim(v_0v_1\dots v_n)$, cette dimension.
- Les points de V sont les **sommets** du simplexe $v_0v_1\dots v_n$.
- L'enveloppe convexe d'un sous ensemble non vide W de V est une **face** de $v_0v_1\dots v_n$.
- Si W contient exactement deux éléments de V , l'enveloppe convexe de W est une **arête** de $v_0v_1\dots v_n$. Une face ou une arête d'un simplexe sont eux même des simplexes de \mathbb{R}^m .
- Un **complexe euclidien** est une collection K de simplexes dans \mathbb{R}^m telle que :
 1. K contient toutes les faces de tous les éléments de K .
 2. Si σ et τ appartiennent à K et $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ alors $\sigma \cap \tau$ est une face à la fois de σ et de τ .
 3. Pour tout $\sigma \in K$, il existe U un voisinage de σ qui n'intersecte qu'un nombre fini d'éléments de K .

La **dimension** d'un complexe euclidien est la plus grande des dimensions des simplexes qui le composent.

REMARQUE 3.3. — Un complexe euclidien possède un nombre au plus dénombrable d'éléments.

Notation : Si K est un complexe euclidien, on note $|K| = \bigcup_{\tau \in K} \tau$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle de \mathbb{R}^m .

- Soit K et K' deux complexes euclidiens de \mathbb{R}^m . Si $|K| = |K'|$ et si pour tout σ de K' , il existe $\tau \in K$ tel que σ est inclus dans τ , on dit que K' est un **sous complexe** de K . On note $K' < K$.
- Soit K un complexe euclidien, $\|K\| = \sup_{\sigma \in K} (\text{diam}(\sigma))$ où $\text{diam}(\sigma) = \sup_{x, y \in \sigma} d(x, y)$ est le diamètre de σ .

• Complexes euclidiens et surfaces : propriétés

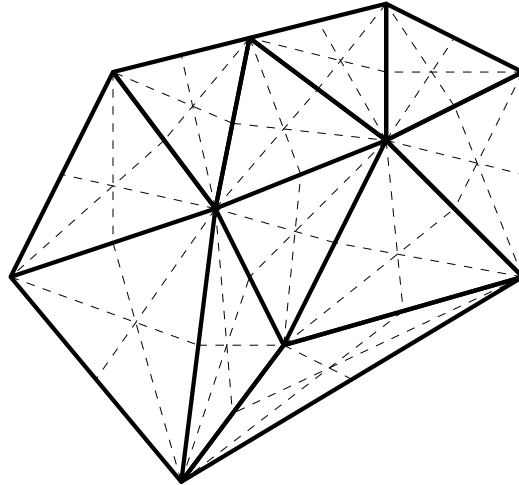
THÉOREME 3.4. — Soit M une surface, il existe $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes euclidiens de dimension 2 tels que :

1. $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, |K_n| = |K_m|$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}, K_{n+1} < K_n$,
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|K_n\| = 0$,
4. il existe un homéomorphisme f de $|K|$ sur M où $|K| = |K_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que K_n est une **triangulation** de M . Remarquons que $|K_n|$ est une variété de dimension 2 sans bord.

Commentaire sur la preuve du théorème 3.4. – Dans [Mo77], il est démontré que toute surface admet une triangulation K . En observant précisément la preuve, on peut construire K de telle sorte que $\|K\|$ est inférieur à 1. La suite (K_n) telle qu'elle est décrite dans le théorème 3.4, est alors définie par récurrence :

1. On pose $K_0 = K$.
2. Soit n un entier naturel, supposons avoir construit complexe euclidien K_n . On obtient K_{n+1} en prenant une "subdivision barycentrique" de K_n . Voici un schéma qui représente K_{n+1} en fonction de K_n :



Les arêtes de K_n sont représentées en trait continu, alors que les arêtes de K_{n+1} sont les segments en trait continu qui relient les sommets de K_n et les milieux des arêtes de K_n , ainsi que les segments en trait pointillé.

Pour une définition précise, nous renvoyons à la page 45 de [Mo77]. On démontre alors que $\|K_{n+1}\|$ est inférieur ou égale à $\frac{2}{3}\|K_n\|$.

Ainsi pour tout n entier naturel :

$$\|K_n\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \|K_0\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Ce qui démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|K_n\| = 0$. ■

PROPOSITION 3.5. — Soit K un complexe euclidien tel que $|K|$ est une variété de dimension 2. Alors K est l'ensemble de ses simplexes de dimension 2 et de leurs faces.

REMARQUE 3.6. — Remarquons que dans le cadre de la proposition ci-dessus :

$$- |K| = \bigcup_{\substack{\tau \in K \\ \dim \tau = 2}} \tau.$$

- Chaque simplexe de dimension 1 est inclus dans exactement deux simplexes de dimension 2 de K .
- La frontière d'un simplexe de dimension 2 est l'union de ses arêtes. Elle est de plus égale à la frontière de l'intérieur de ce simplexe. Ce qui implique que l'adhérence de l'intérieur d'un simplexe coïncide avec ce simplexe.

PROPOSITION 3.7. — Soit K un complexe euclidien tel que $|K|$ est une variété de dimension 2. Soit $x \in K$. Alors $\bigcup_{\substack{\tau \in K \\ x \in \tau}} \tau$ est un voisinage de x .

Démonstration. — Considérons $F = \{\tau \in E, x \notin \tau\}$ puis $|F| = \bigcup_{\tau \in F} \tau$. Alors $|K| \setminus |F|$ est inclus dans $\bigcup_{\substack{\tau \in K \\ x \in \tau}} \tau$ et contient x . Il suffit donc de démontrer que $|F|$ est fermé pour conclure que $\bigcup_{\substack{\tau \in K \\ x \in \tau}} \tau$ est un voisinage de x .

Soit y un point de l'adhérence de F . Par définition d'un complexe, il existe O un ouvert contenant y qui rencontre seulement un nombre fini de simplexes. En particulier, il rencontre seulement un nombre fini de simplexes appartenant à F . Comme y appartient à l'adhérence de F , l'ensemble des simplexes appartenant à F rencontrant O est non vide.

Soit τ_1, \dots, τ_k les simplexes appartenant à F rencontrant O .

L'ouvert $O \setminus \bigcup_{i=1}^k \tau_i$ est un ouvert inclus dans le complémentaire de F et y appartient à l'adhérence de

F , donc y n'appartient pas à cet ouvert. Par conséquent $y \in \bigcup_{i=1}^k \tau_i$.

Or les simplexes τ_1, \dots, τ_k appartiennent à F . Donc y appartient à F . Ainsi l'adhérence de F coïncide avec F , ce qui prouve que F est fermé. \square

REMARQUE 3.8. — Dans le cadre de la proposition ci-dessus, si $x \in |K|$ alors :

$$\bigcup_{\substack{\tau \in K \\ x \in \tau}} \tau = \bigcup_{\substack{\tau \in K, x \in \tau \\ \dim \tau = 2}} \tau.$$

3.3 Construction d'une famille dénombrable d'anneaux constituant une base de voisinages d'une courbe quelconque

THÉOREME 3.9. — Soit M une surface. Il existe \mathcal{B} une famille dénombrable d'ouverts de M homéomorphes à l'anneau \mathbb{A} telle que pour toute courbe simple $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$, pour tout voisinage V de $\gamma(\mathbb{T}^1)$, il existe A un élément de \mathcal{B} tel que :

- $\gamma(\mathbb{T}^1) \subseteq A \subseteq V$,
- la courbe γ est une courbe essentielle de A .

Démonstration. — Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de complexes et f un homéomorphisme entre $|K| = |K_n|$ et la surface M donnés par le théorème 3.4.

Soit $n \in \mathbb{N}$, considérons Γ_n l'ensemble des unions d'un nombre fini d'arêtes et de sommets de K_n .

Considérons Γ l'union des Γ_n puis $f(\Gamma)$ l'ensemble des images par f des éléments de Γ . Remarquons que $f(\Gamma)$ est au plus dénombrable puisque d'après la remarque 3.3, chacun des K_n l'est.

Enfin, posons \mathcal{B} l'ensemble des ouverts de M homéomorphes à l'anneau \mathbb{A} et dont la frontière est un élément de $f(\Gamma)$. Il s'agit à présent de démontrer que \mathcal{B} est l'ensemble qui nous intéresse, c'est-à-dire :

1. que \mathcal{B} est au plus dénombrable,
2. si $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ est une courbe fermée simple et si U est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$, il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que A est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ inclus dans U et tel que γ est une courbe essentielle de A .

• L'ensemble \mathcal{B} est au plus dénombrable

Commençons tout d'abord par un résultat purement topologique.

LEMME 3.10. — *Soit X un espace topologique séparable et F un fermé de X alors F est la frontière d'un nombre au plus dénombrable d'ouverts connexes.*

Preuve. — La preuve de ce résultat s'appuie sur les deux résultats suivants.

SOUS LEMME 3.11. — *L'ensemble des composantes connexes de $X \setminus F$ est au plus dénombrable.*

Preuve du sous lemme 3.11. — L'espace topologique X est séparable. Soit donc D une partie dense de X dénombrable. Considérons \mathcal{C} l'ensemble des composantes connexes de $X \setminus F$ puis :

$$\begin{aligned} \Phi : D \cap (X \setminus F) &\longrightarrow \mathcal{C} \\ x &\longmapsto O \text{ tel que } x \in O. \end{aligned}$$

L'application Φ est définie car les éléments de \mathcal{C} sont deux à deux disjoints. De plus Φ est surjective car D est dense et les éléments de \mathcal{C} sont des ouverts de X . Donc \mathcal{C} est au plus dénombrable.

Voici tout d'abord un résultat topologique utile pour la preuve. Nous retrouverons ce résultat un peu plus loin :

SOUS LEMME 3.12. — *Soit F une partie fermée non vide d'un espace topologique X .*

Si O est un ouvert connexe non vide qui ne rencontre pas F et dont la frontière est incluse dans F , alors O est une composante connexe de $X \setminus F$.

Preuve du lemme 3.12. — L'ouvert O ne rencontrant pas F , il est inclus dans le complémentaire de F . Or il est connexe, il existe donc C une composante connexe de $X \setminus F$ qui contient O . L'adhérence de O est incluse dans $O \cup F$. Par conséquent, $C \setminus \overline{O}$ est égale à $C \setminus O$ car $F \cap C = \emptyset$. Cet ensemble C est donc l'union de deux ouverts $C \setminus \overline{O}$ et O . Or C est connexe. Donc l'un de ces ouverts est vide. Mais O n'est pas vide par hypothèse. Par conséquent, c'est l'ensemble $C \setminus O$ qui est vide. Ainsi $C = O$ et O est une composante connexe de $X \setminus F$.

Ce qui permet de terminer la preuve. En effet, d'après le sous lemme 3.12, tout ouvert connexe dont la frontière est F est l'une des composantes connexes de $X \setminus F$. Or d'après le sous lemme 3.11,

l'ensemble de ces composantes est au plus dénombrable. Le fermé F est donc la frontière d'un nombre au plus dénombrable d'ouverts connexes. ■

Les éléments de $f(\Gamma)$ sont des fermés. D'après le lemme ci-dessus, chacun est la frontière d'un nombre au plus dénombrables d'ouverts connexes, a fortiori d'ouverts homéomorphes à \mathbb{A} . Or $f(\Gamma)$ est au plus dénombrable. Donc \mathcal{B} est plus dénombrable.

• **Si $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ est une courbe fermée simple et si U est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$, il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que A est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ inclus dans U et tel que γ est une courbe essentielle de A**

Soit $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple et U un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$. D'après le §3.1 de ce chapitre, on peut supposer que U est homéomorphe à \mathbb{A} et que γ est une courbe essentielle de U . Nous allons construire un élément A appartenant à \mathcal{B} qui convient en utilisant des lemmes que nous allons énoncer au fur et à mesure et que nous prouverons à la fin de ce paragraphe.

Posons :

$$V = f^{-1}(U) \subseteq |K|,$$

$$\varepsilon = \min\{d(x, y) \mid x \in f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1)), y \in |K| \setminus V\}.$$

L'ensemble V est ouvert donc $|K| \setminus V$ est fermé. De plus $f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$ est compact. Le réel ε est donc strictement positif. Comme la suite $(\|K\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|K_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons :

$$E = \{\tau \in K_n \mid \dim(\tau) = 2, \tau \cap f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1)) \neq \emptyset\}.$$

LEMME 3.13. — *si $\tau \in E$ alors $\tau \subseteq V$.*

Posons $F = \bigcup_{\tau \in E} \tau$ qui est inclus dans V .

LEMME 3.14. — *L'ensemble F est un voisinage compact connexe de $f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$ dans $|K|$. De plus $\overline{\text{int}(F)} = F$.*

Analysons le complémentaire de F dans V .

LEMME 3.15. — *L'ensemble $V \setminus F$ possède deux composantes connexes F_1 et F_2 homéomorphes à l'anneau. De plus la frontière de $V \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2})$ est une union finie d'arêtes ou de sommets de K_n inclus dans V .*

Soit C la composante connexe de l'ouvert $V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$ qui contient $f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$. Cet ensemble C est un voisinage de $f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$ inclus dans V .

LEMME 3.16. — *L'ensemble C est un anneau dont $f^{-1} \circ \gamma$ est une courbe essentielle.*

LEMME 3.17. — *La frontière de C est une union finie d'arêtes et de sommets de K_n .*

Posons $A = f(C)$. Cet ensemble est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ inclus dans U . D'après les deux lemmes ci-dessus, il est homéomorphe à l'anneau et sa frontière qui est l'image par f de la frontière de C appartient à $f(\Gamma)$. Par conséquent :

$$A \in \mathcal{B}.$$

De plus, la courbe $f^{-1} \circ \gamma$ étant une courbe essentielle de C , la courbe γ est une courbe essentielle de A .

Reste à prouver les cinq lemmes ci-dessus.

Preuve du lemme 3.13. — Soit $\tau \in E$ et $x \in \tau$. Le simplexe τ rencontre $f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$ et

$$\text{diam}(\tau) \leq \|K_n\| \leq 1/n < \varepsilon.$$

Donc :

$$d(x, f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))) \leq \text{diam}(\tau) < \varepsilon.$$

Or $d(f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1)), |K| \setminus V) = \varepsilon$. Donc x appartient à V , ce qui implique que τ est inclus dans V . ■

Preuve du lemme 3.14. — Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que F est connexe en vérifiant qu'il est connexe par arcs. Démontrons que :

- (1) l'ensemble F est un voisinage de $f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$,
- (2) qu'il est compact,
- (3) qu'il est contenu dans l'adhérence de son intérieur.

(1) Soit $x \in f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$. L'ensemble F contient les simplexes de dimension 2 auxquels appartient x . Or d'après la propriété 3.7 et de la remarque qui suit, $\bigcup_{\substack{x \in \tau \\ \dim(\tau)=2}} \tau$ est un voisinage de x . Par conséquent F est un voisinage de x .

(2) L'ensemble F est une union de compacts car tout simplexe est compact. Vérifions que l'ensemble des simplexes qui composent F , c'est-à-dire E lui même, est fini. Pour tout $x \in f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$, il existe O_x contenant x qui rencontre seulement un nombre fini de simplexes (cf. la définition d'un complexe). Or $f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$ est compact, il existe donc \mathcal{O} un ensemble fini de ces ouverts O_x tel que :

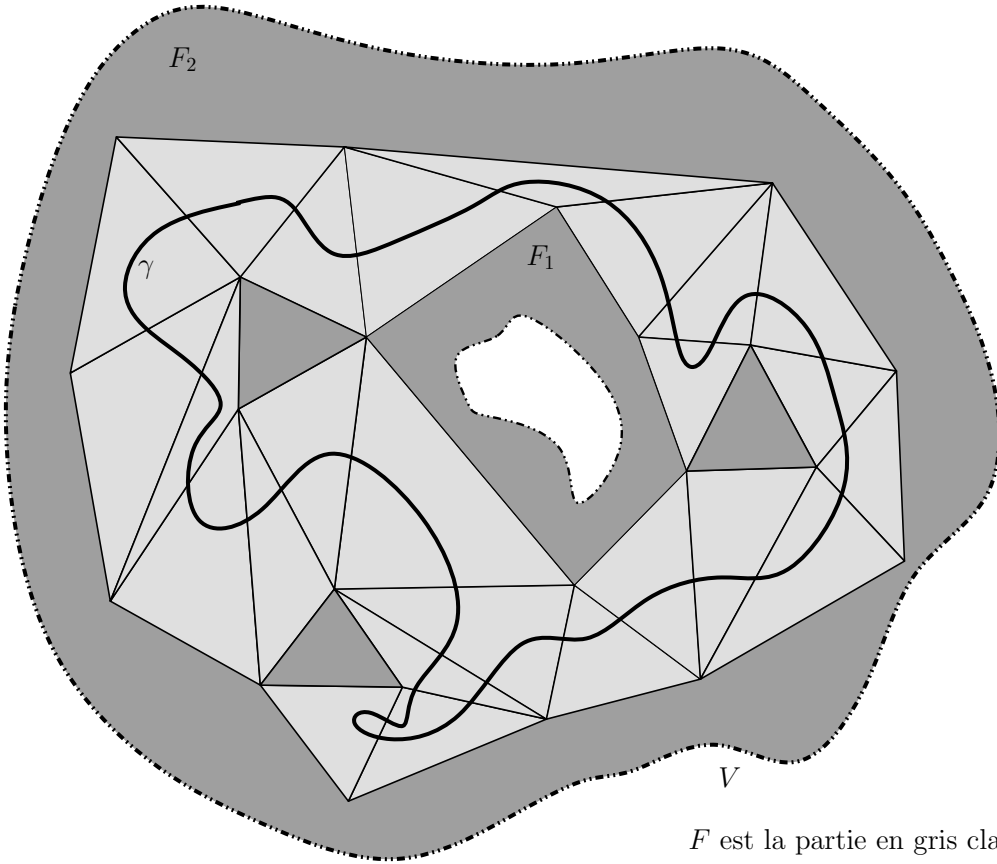
$$f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1)) \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O.$$

Remarquons que l'ensemble des simplexes rencontrant l'un des ouverts de \mathcal{O} est un ensemble fini. Or si un simplexe appartient à E , il rencontre $f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$ et donc l'un des ouverts de \mathcal{O} . Par conséquent E est un ensemble fini de simplexes. Le sous ensemble F de $|K|$ est donc compact.

(3) D'après l'un des points de la remarque 3.6, un simplexe de dimension 2 coïncide avec l'adhérence de son intérieur. De plus si $\tau \in E$, $\overline{\text{int}(\tau)}$ est inclus dans $\overline{\text{int}(F)}$. Par conséquent :

$$F = \bigcup_{\tau \in E} \tau = \bigcup_{\tau \in E} \overline{\text{int}(\tau)} \subseteq \overline{\text{int}(F)} \subseteq F.$$

Ce qui permet de conclure que $\overline{\text{int}(F)} = F$. ■



Preuve du lemme 3.15. — L'ouvert V est un anneau, il existe donc un homéomorphisme $\phi : V \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S, N\}$.

Remarquons que $\phi \circ f^{-1} \circ \gamma$ est une courbe essentielle de $\mathbb{S}^2 \setminus \{S, N\}$ car $f^{-1} \circ \gamma$ est une courbe essentielle de V . Les pôles S et N appartiennent donc à deux composantes connexes distinctes de $\mathbb{S}^2 \setminus \phi \circ f^{-1} \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$

D'après le théorème de Jordan 2.11, $\mathbb{S}^2 \setminus \phi \circ f^{-1} \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$ est l'union de deux composantes connexes, homéomorphes à \mathbb{R}^2 dont la frontière est $\phi \circ f^{-1} \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$. Soit A_1 et A_2 les deux composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus \phi \circ f^{-1} \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$ contenant respectivement N et S .

L'ensemble F étant un compact connexe non vide de V , $\phi(F)$ est un fermé connexe non vide de la sphère. Par conséquent, d'après la proposition 2.7, les composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus \phi(F)$ sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 . Elles sont de plus incluses dans $A_1 \cup A_2$.

Soit \tilde{F}_1 et \tilde{F}_2 les composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus \phi(F)$ contenant respectivement N et S . La composante \tilde{F}_1 est incluse dans A_1 alors que \tilde{F}_2 est incluse dans A_2 . Par conséquent \tilde{F}_1 et \tilde{F}_2 sont distinctes. Posons :

$$F_1 = \phi^{-1}(\tilde{F}_1 \setminus \{N\}) \text{ et } F_2 = \phi^{-1}(\tilde{F}_2 \setminus \{S\}).$$

Les ouverts F_1 et F_2 sont alors deux composantes connexes de $V \setminus F$ homéomorphes à l'anneau \mathbb{A} . Si O est une composante connexe de $V \setminus F$ distincte de F_1 et F_2 , elle est l'image par ϕ^{-1} d'une composante connexe O' de $\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{F}$ distincte de \tilde{F}_1 et \tilde{F}_2 . Elle est donc homéomorphe à \mathbb{R}^2 . De plus O' étant incluse dans le fermé $\mathbb{S}^2 \setminus (F_1 \cup F_2)$, l'adhérence de O' est un compact inclus dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{S, N\}$. Ainsi O est relativement compact dans V .

Reste à démontrer que la frontière de $V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$ est une union finie d'arêtes ou de sommets de K_n .

SOUS LEMME 3.18. — $\text{Fr}(V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}) = \text{Fr}_V(\overline{F_1}) \cup \text{Fr}_V(\overline{F_2}) \subseteq \text{Fr}(F)$.

Preuve . — Nous allons vérifier que :

1. $\text{Fr}(V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}) \subseteq V$,
2. $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap V = \emptyset$.

Ainsi d'après 1, $\text{Fr}(V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}) = \text{Fr}_V(V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2})$. D'après 2, l'adhérence de F_1 et l'adhérence de F_2 dans V sont disjointes, le lecteur peut alors facilement vérifier que $\text{Fr}_V(V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}) = \text{Fr}_V \overline{F_1} \cup \text{Fr}_V \overline{F_2}$. Ainsi

$$\text{Fr}(V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}) = \text{Fr}_V \overline{F_1} \cup \text{Fr}_V \overline{F_2}.$$

Les ouverts F_1 et F_2 sont des composantes connexes de $V \setminus F$. Donc $\text{Fr}_V(F_1)$ et $\text{Fr}_V(F_2)$ sont incluses dans $\text{Fr}(F)$. La frontière de l'adhérence d'un ouvert étant incluse dans la frontière de cet ouvert, on en déduit que :

$$\text{Fr}_V \overline{F_1} \cup \text{Fr}_V \overline{F_2} \subseteq \text{Fr}_V(F).$$

Or F étant un fermé inclus dans V , sa frontière est incluse dans V . Par conséquent :

$$\text{Fr}_V \overline{F_1} \cup \text{Fr}_V \overline{F_2} \subseteq \text{Fr}(F).$$

Reste donc à vérifier les deux points ci-dessus.

1. Notons \mathcal{C} l'ensemble des composantes connexes de $V \setminus F$ distinctes de F_1 et F_2 . Alors

$$V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2} \subseteq V \setminus F_1 \cup F_2 = F \cup \left(\bigcup_{O \in \mathcal{C}} O \right) \subseteq F \cup \left(\bigcup_{O \in \mathcal{C}} \overline{O} \right).$$

Or comme nous l'avons souligné ci-dessus, l'adhérence d'un élément O de \mathcal{C} , est incluse dans V . Par conséquent, $V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$ est inclus dans un fermé inclus dans V . Ce qui permet de conclure que

$$\text{Fr}(V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}) \subseteq V.$$

2. La courbe $f^{-1} \circ \gamma$ étant une courbe essentielle de l'anneau V , $V \setminus f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$ est l'union de deux anneaux disjoints V_1 et V_2 .

Reprenons les notations ci-dessus : V_1 est l'image par ϕ^{-1} de A_1 et V_2 est l'image par ϕ^{-1} de A_2 . Ainsi F_1 est inclus dans V_1 et F_2 est inclus dans V_2 . Rappelons que F est un voisinage de $f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$ ce qui signifie que $f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1)) \subseteq \text{int}(F)$.

Par conséquent

$$F_1 \cup F_2 \subseteq V \setminus F \subseteq V \setminus \text{int}(F) \subseteq V \setminus \gamma(\mathbb{T}^1) \subseteq V_1 \cup V_2.$$

L'ensemble $V \setminus \text{int}(F)$ est un fermé de V donc $\overline{F_1} \cap V \subseteq V \setminus \text{int}(F)$. Or $\overline{F_1} \cap V$ est un connexe de V (car $F_1 \subseteq \overline{F_1} \cap V \subseteq \overline{F_1}$). Il est donc contenu dans V_1 ou dans V_2 . Or F_1 est contenu dans V_1 . Donc $\overline{F_1} \cap V$ est inclus dans V_1 . De la même façon, on démontre que $\overline{F_2} \cap V$ est contenu dans V_2 . Ce qui prouve que :

$$\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap V = \emptyset.$$

■

Or $F = \bigcup_{\tau \in E} \tau$. Sa frontière est donc incluse dans l'union des frontières des faces $\tau \in E$. La frontière d'une face étant une arête,

$$\text{Fr}(V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}) \subseteq \text{Fr}(F) \subseteq \bigcup_{\substack{\sigma \text{ arête de } \tau \\ \tau \in E}} \sigma.$$

Notation : Si ab est une arête alors $]ab[= ab \setminus \{a; b\}$.

SOUS LEMME 3.19. — Si $\sigma = ab$ est une arête de K_n telle que $]ab[\cap \text{Fr}(V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}) \neq \emptyset$ alors σ est incluse dans la frontière de $V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$.

Ainsi la frontière de $V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$, si elle rencontre une arête ailleurs qu'en un sommet, contient toute l'arête. La frontière de $V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$ est donc une union de sommets ou d'arêtes de K_n .

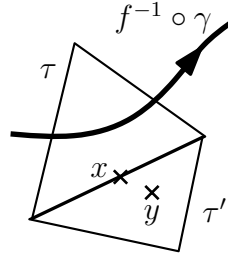
Preuve du sous lemme 3.19. — Soit $\sigma = ab$ tel que $]ab[\cap \text{Fr}(V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2}) \neq \emptyset$ et $x \in]ab[\cap \text{Fr}(V \setminus \overline{F_1} \cup \overline{F_2})$. Supposons que $x \in \text{Fr}_V(\overline{F_1})$. Soit τ et τ' les deux faces de K_n dont σ est l'arête commune. Remarquons que d'après la remarque 3.6 et la proposition 3.7, τ et τ' sont les deux seules faces contenant x dont l'union constitue un voisinage.

D'après le sous lemme 3.18, $\text{Fr}_V(F_1) \subseteq \text{Fr}(F)$. Or F est fermé donc $x \in F$. Ainsi τ ou τ' est incluse dans F . Supposons que F contient τ .

Le point x appartenant à F et l'ensemble $\tau \cup \tau'$ étant un voisinage de x , $(\tau \cup \tau') \cap M \setminus F \neq \emptyset$. Or $\tau \subseteq F$ donc $\tau' \cap M \setminus F \neq \emptyset$. Remarquons que si l'intérieur d'une face rencontre F elle est tout entière incluse dans F . Donc

$$\text{int}(\tau') \subseteq M \setminus F.$$

Or $\tau' \subseteq V$ car si $y \in \tau'$, $d(y, f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))) \leq d(x, y) + d(x, f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))) \leq \text{diam}(\tau') + \text{diam}(\tau) \leq 2/n < \varepsilon$.



Par conséquent l'intérieur de τ' est inclus dans une composante de $V \setminus F$. Or x appartient à la frontière de F_1 donc $(\tau' \cup \tau) \cap F_1 \neq \emptyset$. La face τ étant incluse dans F et $F \cap F_1 = \emptyset$, $\tau' \cap F_1 \neq \emptyset$. Or l'adhérence de $\text{int}(\tau_1)$ coïncide avec τ_1 . Donc $F_1 \cap \text{int}(\tau') \neq \emptyset$. En utilisant la connexité de $\text{int}(\tau')$ on obtient que $\text{int}(\tau') \subseteq F_1$ puis que :

$$\sigma \subseteq \overline{\text{int}(\tau')} \subseteq \overline{F_1} \cap V.$$

Or σ est une arête de τ et $\tau \subseteq F$ donc $\sigma \subseteq F$. De plus F est inclus dans $V \setminus F_1$ donc l'intérieur de F est inclus dans l'intérieur de $V \setminus F_1$. Or $\text{int}(V \setminus F_1) = V \setminus \overline{F_1}$. Donc :

$$F = \overline{\text{int}(F)} \subseteq \overline{V \setminus \overline{F_1}}.$$

Par conséquent, σ étant inclus dans F ,

$$\sigma \subseteq V \cap \overline{V \setminus \overline{F_1}}.$$

Donc :

$$\sigma \subseteq V \cap \overline{F_1} \cap \overline{V \setminus \overline{F_1}} = \text{Fr}_V \overline{F_1}.$$

■

Preuve du lemme 3.16. — Reprenons les notations de la preuve précédente. L'application ϕ est un homéomorphisme entre V et $\mathbb{S}^2 \setminus \{N; S\}$ et les ouverts \tilde{F}_1 et \tilde{F}_2 sont les composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus \phi(F)$ qui contiennent respectivement N et S . Les adhérences de \tilde{F}_1 et \tilde{F}_2 notées respectivement $\overline{\tilde{F}_1}$ et $\overline{\tilde{F}_2}$ sont donc des connexes fermés de \mathbb{S}^2 disjoints contenant respectivement N et S . Par conséquent :

- l'ensemble $V \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2 \setminus (\overline{\tilde{F}_1} \cup \overline{\tilde{F}_2})$,
- d'après la proposition 2.10, les composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus (\overline{\tilde{F}_1} \cup \overline{\tilde{F}_2})$ sont homéomorphes au plan \mathbb{R}^2 ou à l'anneau \mathbb{A} .

L'ouvert C étant une composante connexe de $V \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2})$, il est donc homéomorphe au plan ou à l'anneau. Or C est un voisinage de $f^{-1} \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$ inclus dans V et $f^{-1} \circ \gamma$ est une courbe essentielle de V . Elle ne peut être homotope à un point dans C sans contredire le fait qu'elle est essentielle dans V . Donc C est un anneau et $f^{-1} \circ \gamma$ est une courbe essentielle de C . ■

Preuve du lemme 3.17. — L'ouvert C est une composante connexe de $V \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2})$. La frontière de C est donc incluse dans la frontière de $V \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2})$. Or d'après le lemme 3.15 la frontière de $V \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2})$ est une union finie d'arêtes ou de sommets de K_n . Ainsi la frontière de C est incluse dans une union finie d'arêtes ou de sommets de K_n .

Sous lemme 3.20. — Si $\sigma = ab$ est une arête de K_n telle que $]ab[\cap \text{Fr}(C) \neq \emptyset$ alors σ est incluse dans la frontière de C .

Ainsi la frontière de C , si elle rencontre une arête en un autre point qu'en l'un de ses sommets, contient toute l'arête. La frontière de C est donc bien une union finie d'arêtes ou de sommets de K_n .

Preuve du sous lemme 3.20. — Soit $\sigma = ab$ tel que $]ab[\cap \text{Fr}(C) \neq \emptyset$ et $x \in]ab[\cap \text{Fr}(C)$. Considérons τ_1 et τ_2 les deux faces de K_n dont σ est l'arête commune. D'après la proposition 3.7, $\tau_1 \cup \tau_2$ est un voisinage de x . Comme x appartient à la frontière de C , l'ouvert C rencontre $\tau_1 \cup \tau_2$ donc τ_1 par exemple. Or τ_1 coïncide avec avec l'adhérence de son intérieur. Ainsi :

$$C \cap \text{int}(\tau_1) \neq \emptyset.$$

Comme la frontière de C est incluse dans une union de sommets ou d'arêtes de K_n , elle ne rencontre pas $\text{int}(\tau_1)$. Ainsi $\text{int}(\tau_1)$ étant connexe,

$$\text{int}(\tau_1) \subseteq C.$$

Donc σ étant incluse dans la frontière de $\text{int}(\tau_1)$,

$$\sigma \subseteq \overline{C}. \quad (1)$$

Or $]ab[\cap \text{Fr}(C) \neq \emptyset$ et $\text{Fr}(C)$ est incluse dans $\text{Fr}(V \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2}))$. Donc $]ab[$ rencontre $\text{Fr}(V \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2}))$. Comme $\text{Fr}(V \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2}))$ est une union de sommets et d'arêtes de K_n , l'arête σ est incluse dans $\text{Fr}(V \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2}))$. L'ensemble C étant un ouvert dont la frontière est incluse dans $\text{Fr}(V \setminus (\overline{F_1} \cup \overline{F_2}))$, on en déduit que :

$$\sigma \cap C = \emptyset. \quad (2)$$

D'après (1) et (2), l'arête σ est incluse dans $\overline{C} \setminus C = \text{Fr}(C)$. ■

□

Chapitre II

Génériquement, une courbe fermée simple invariante
contient un point périodique elliptique

Dans ce chapitre, nous allons démontrer qu'il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ muni de la C^1 topologie de Whitney, dont les éléments, s'ils possèdent une courbe fermée simple invariante, possèdent sur l'image de cette courbe au moins un point périodique elliptique.

Pour cela, nous allons, dans une première étape, supprimer les courbes invariantes sans point périodique, autrement dit nous allons démontrer qu'il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ dont les éléments possèdent des points périodiques sur les courbes fermées simples qu'ils laissent invariantes. Le Connecting Lemma constitue l'outil de base de cette démonstration. C'est d'ailleurs pour cela que nous devons travailler en topologie C^1 . De plus, nous allons nous placer dans un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ qui :

- si M est compacte, est constitué de difféomorphismes symplectiques qui possèdent une orbite dense,
- si M n'est pas compacte, est constituée de difféomorphismes symplectiques qui admettent une partie dense de M dont les points ont une orbite qui sort de tout compact.

Les constructions de ces deux G_δ denses s'appuient elles-mêmes sur le Connecting Lemma et constituent des résultats de dynamique symplectique générique. Pour cela nous renvoyons à [ABC05].

Ensuite nous démontrerons qu'il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ dont les éléments admettent non seulement des points périodiques sur les courbes fermées simples qu'ils laissent invariantes mais aussi que ces points ne peuvent être tous hyperboliques. Pour cela nous nous inspirerons de l'idée qu'Herman a développé à propos des courbes invariantes par les applications déviant la verticale de l'anneau.

Ce chapitre s'articule donc en trois parties.

Dans une première partie, après avoir donné quelques définitions préliminaires, nous énoncerons le Connecting Lemma ainsi que les résultats de genericité s'y rattachant. A ce stade, nous pourrions facilement déduire quelques résultats dans le plan, l'anneau ou la sphère. En particulier nous aurons obtenu le résultat souhaité dans le cas où la surface considérée est le plan c'est-à-dire que nous aurons vérifié qu'il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(\mathbb{R}^2)$ dont les éléments n'ont pas de courbes fermées simples invariantes. Puis nous tenterons d'expliquer l'argument utilisé par Herman pour supprimer les courbes invariantes des applications de l'anneau déviant la verticale.

Dans une seconde partie, nous exploiterons le Connecting Lemma. Enfin en troisième partie, nous utiliserons l'argument d'Herman.

1 Préliminaires et résultats connus

1.1 Points périodiques d'un difféomorphisme symplectique

Soit (M, ω) une surface symplectique.

• définitions

DÉFINITION 1.1. — Soit f un difféomorphisme symplectique d'une surface M , $p \in M$ et k un entier non nul.

On dit que p est un **point périodique de période k** (ou que p est un **point k -périodique**) de f si $f^k(p) = p$ et si k étant strictement plus grand que 1, $f^i(p) \neq p$ pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

REMARQUE 1.2. — Si p est un point périodique de période k alors $Df^k(p)$ est une application linéaire bijective de T_pM .

PROPOSITION ET DÉFINITION 1.3. — Soit f un difféomorphisme symplectique d'une surface M , $p \in M$ et k un entier non nul.

Si p est un point k -périodique alors $Df^k(p)$ possède deux valeurs propres λ et μ dont le produit est égal à 1. Il y a deux cas :

- les complexes λ et μ sont conjugués et $|\lambda| = |\mu| = 1$. On dit alors que p est un point périodique **elliptique** de f
- sinon λ et μ sont des réels différents de 1 et -1 et $\mu = 1/\lambda$. On dit alors que p est un point périodique **hyperbolique** de f .

Démonstration. — Comme f est un difféomorphisme symplectique, $Df^k(p)$ est une application linéaire bijective de T_pM telle que pour tout $(v, w) \in (T_pM)^2$, $\omega_p(Df^k(p)u, Df^k(p)w) = \omega_p(v, w)$. Donc $\det(Df^k(p)) = 1$. Par conséquent, le produit $\lambda\mu$ est égal à 1. Ainsi $|\lambda| = |\mu| = 1$ si λ et μ sont des complexes conjugués. Sinon λ et μ sont des réels et $\mu = 1/\lambda$. \square

DÉFINITION 1.4. — Soit f un difféomorphisme symplectique d'une surface M , $p \in M$ et k un entier non nul.

Si p est un point k périodique pour f et que les valeurs propres de $Df^k(x)$ ne sont pas des racines de l'unité, on dit que p est un point périodique **non dégénéré** de f .

• Quelques propriétés sur les points périodiques d'un difféomorphisme symplectique

PROPOSITION 1.5. — Soit f un difféomorphisme symplectique d'une surface M , $p \in M$ un point périodique de f et m un entier non nul.

Le point p est un point périodique elliptique [respectivement hyperbolique ou non dégénéré] de f si et seulement si p est un point périodique elliptique [respectivement hyperbolique ou non dégénéré] de f^m .

Démonstration. — Soit k la période de p . Soit k' le plus petit multiple commun de k et m , p est alors un point périodique de période k'/m pour f^m . Or :

$$D(f^m)^{k'/m}(p) = Df^{k'}(p) = (Df^k(p))^{k'/k}.$$

Par conséquent si λ et μ sont les deux valeurs propres de $Df^k(p)$, $\lambda^{k'/k}$ et $\mu^{k'/k}$ sont les deux valeurs propres de $D(f^m)^{k'/m}(p)$. D'où le résultat. \square

PROPOSITION 1.6. — Soit f un difféomorphisme symplectique d'une surface M , k et m deux entiers non nuls et $p \in M$ un point k -périodique de f .

Si p est un point périodique elliptique [respectivement hyperbolique ou non dégénéré] de f , $f^m(p)$ est aussi un point périodique elliptique [respectivement hyperbolique ou non dégénéré] de f .

Démonstration. — Si k est la période de p , k est aussi la période de $f^m(p)$. Or $Df^{k+m}(p) = Df^k(f^m(p))Df^m(p) = Df^m(p)Df^k(p)$ ce qui implique :

$$Df^k(f^m(p)) = Df^m(p)Df^k(p)(Df^m(p))^{-1}.$$

Ainsi $Df^k(p)$ et $Df^k(f^m(p))$ ont les mêmes valeurs propres. D'où le résultat. \square

PROPOSITION 1.7. — Soit f un difféomorphisme symplectique et k un entier non nul.

1. L'ensemble des points périodiques de période inférieure ou égale à k de f est un fermé de M .
2. Soit x un point périodique de période k de f non dégénéré, le point x est isolé parmi les points périodiques de période inférieure à k .

Démonstration. — Le premier point est tout à fait classique. Notons $Per(f, k)$ l'ensemble des points périodiques de période inférieure ou égale à k . C'est l'ensemble des $x \in M$ pour lequel il existe un entier $i \leq k$ tel que $f^i(x) = x$. Or l'application f étant continue, $\{x \in M, f^i(x) = x\}$ est fermé quel que soit l'entier i . L'ensemble $Per(f, k)$ est donc une union finie de fermés.

Venons en au second point : il s'agit de trouver un voisinage de x tel que pour tout entier $i \leq k$, $f^i(x) \neq x$.

Soit i un entier strictement plus petit que k , le point x étant k périodique, $f^i(x) \neq x$. Par continuité de f , il existe un voisinage U de x tel que si $y \in U$, $f^i(y) \neq y$.

Pour régler le cas où $i = k$, travaillons en coordonnées au voisinage de x . Dans ces coordonnées, la différentielle de l'application $F = f^k - \text{id}$ est égale à $Df^k(x) - \text{Id}$. Or x étant un point périodique non dégénéré de f , 1 n'est pas valeur propre de $Df^k(x)$. La différentielle de F en x est donc inversible. Par conséquent, d'après le théorème d'inversion locale, F est un difféomorphisme local. Il existe donc un voisinage V de x tel que si $y \in V$, $F(y) \neq 0$ c'est-à-dire $f^k(y) \neq y$.

Le voisinage de x , $U \cap V$, ne contient donc aucun point périodique de f de période plus petite que k . \square

• Variété stable et variété instable d'un point périodique hyperbolique

Pour ce qui suit, nous renvoyons à [Ro99] ou à [Sh78].

Soit f un difféomorphisme symplectique d'une surface M , k un entier non nul. Soit $p \in M$ un point k -périodique hyperbolique de f et U un voisinage de p .

La **variété locale stable** de p dans le voisinage U est définie par l'ensemble suivant :

$$W_U^s(p, f) = \{x \in U \mid f^{nk}(x) \in U \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{nk}(x), p) = 0\}.$$

La **variété locale instable** de p dans le voisinage U est définie par l'ensemble suivant :

$$W_U^u(p, f) = \{x \in U \mid f^{-nk}(x) \in U \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-nk}(x), p) = 0\}.$$

Notation : Soit p un point k -périodique hyperbolique d'un difféomorphisme symplectique. Soit λ la valeur propre de $Df^k(p)$ dont la valeur absolue est inférieure à 1, $1/\lambda$ est alors la valeur propre de $Df^k(p)$ de valeur absolue supérieure à 1.

L'espace E^s désigne l'espace propre de $Df^k(p)$ relatif à λ tandis que E^u est l'espace propre de $Df^k(p)$ relatif à $1/\lambda$.

Soit $r > 0$, $E^s(r)$ (respectivement $E^u(r)$) désigne la boule de centre r dans l'espace E^s (respectivement E^u).

Si $r > 0$ est suffisamment petit, si $v \in E^s(r)$ et $w \in E^u(r)$, $p + (v, w)$ est le point de M qui est l'image par l'application exponentielle en p du vecteur $v + w \in T_p M$.

L'ensemble noté $p + (E^s(r) \times E^u(r))$ est l'ensemble des points $p + (v, w)$ où $v \in E^s(r)$ et $w \in E^u(r)$

THÉOREME 1.8. — Soit f un difféomorphisme symplectique d'une surface M et k un entier non nul. Soit p un point k -périodique hyperbolique de f .

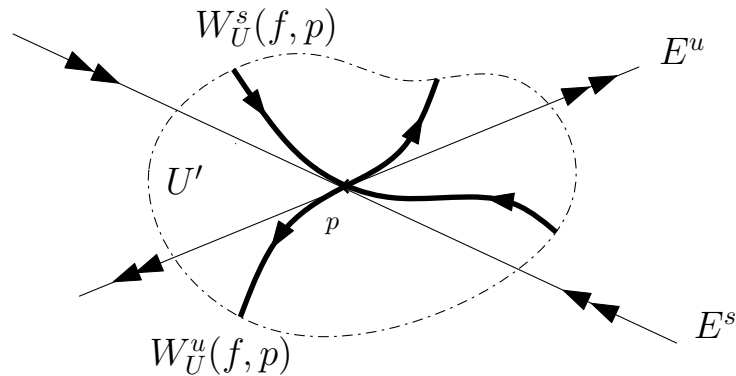
Il existe alors U un voisinage de p tel que pour tout $r > 0$ tel que $U' = p + (E^s(r) \times E^u(r)) \subseteq U$, il existe une application $\sigma^s : E^s(r) \rightarrow E^u(r)$ de classe C^1 telle que $\sigma^s(0) = p$, $(\sigma^s)'(0) = 0$ et telle que :

$$W_{U'}^s(p, f) = \{p + (v, \sigma^s(v)) \mid v \in E^s(r)\}.$$

De même il existe une application $\sigma^u : E^u(r) \rightarrow E^s(r)$ de classe C^1 telle que $\sigma^u(0) = p$, $(\sigma^u)'(0) = 0$ et telle que :

$$W_{U'}^u(p, f) = \{p + (\sigma^u(v), v) \mid v \in E^u(r)\}.$$

De plus si U est suffisamment petit, $W_U^s(p, f) = \{x \in U \mid f^{nk}(x) \in U \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$ et $W_U^u(p, f) = \{x \in U \mid f^{-nk}(x) \in U \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$.



REMARQUE 1.9. — Une variété stable ou instable locale d'un point périodique hyperbolique est une sous-variété de classe C^1 de la surface M .

Une fois que l'on a défini la notion de variété stable et de variété instable de p alors la **variété stable globale** et la **variété instable globale** de p sont obtenues respectivement par :

$$W^s(p, f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-nk}(W_U^s(p, f)),$$

$$W^u(p, f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{nk}(W_U^u(p, f)),$$

Remarquons qu'il y a d'autres façons de caractériser $W^s(p, f)$ et $W^u(p, f)$. Par exemple :

$$\begin{aligned} W^s(p, f) &= \{x \in M \mid \text{il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \geq n_0 \text{ alors } f^{nk}(x) \in U\} \\ &= \{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{nk}(x), p) = 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^u(p, f) &= \{x \in M \mid \text{il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \geq n_0 \text{ alors } f^{-nk}(x) \in U\} \\ &= \{x \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-nk}(x), p) = 0\} \end{aligned}$$

La variété stable et la variété instable d'un point p ne sont pas en général des sous-variétés de classe C^1 . Ce sont les images de \mathbb{R} par des immersions injectives.

Mais nous allons tout de même définir la notion d'espace tangent en un point de l'une de ces variétés. Pour cela, nous allons voir que $W^s(p, f)$ et $W^u(q, f)$ sont des unions croissantes de sous-variétés de classe C^1 de dimension 1.

L'ensemble $W_U^s(p, f)$ est inclus dans $f^{-k}(W_U^s(p, f))$ ainsi pour tout entier n :

$$f^{-nk}(W_U^s(p, f)) \subseteq f^{-(n+1)k}(W_U^s(p, f)).$$

De plus f étant un difféomorphisme, chaque ensemble $f^{-nk}(W_U^s(p, f))$ est une sous-variété de classe C^1 de M . Ainsi l'espace tangent de $f^{-nk}(W_U^s(p, f))$ en x ne dépend pas de l'entier n tel que $x \in f^{-nk}(W_U^s(p, f))$. Notons aussi que l'espace tangent de $f^{-nk}(W_U^s(p, f))$ en x ne dépend pas non plus du voisinage U de p .

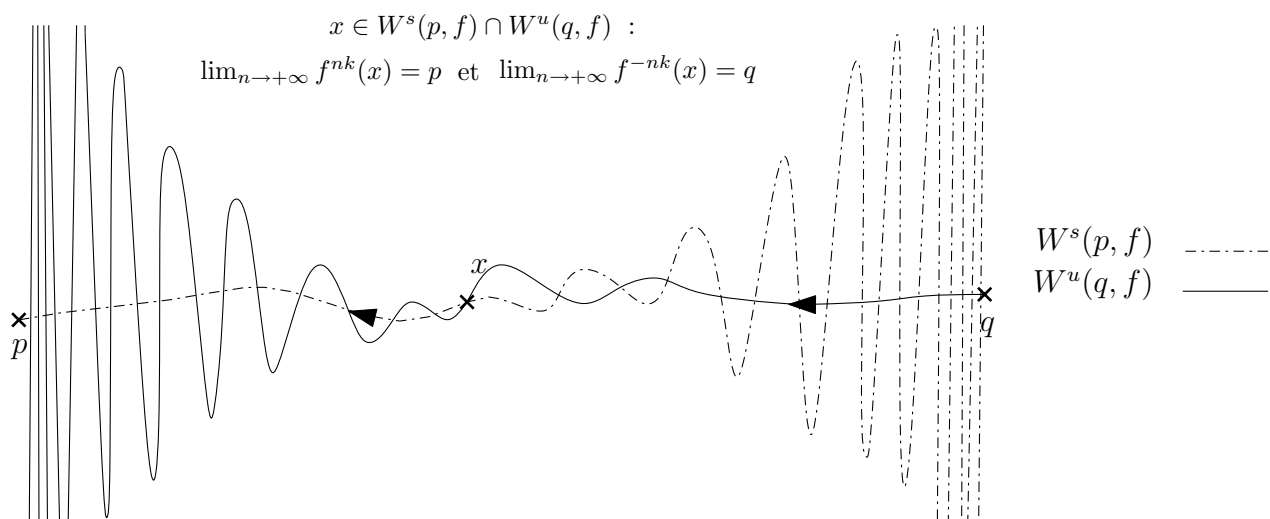
Ce qui permet de définir l'espace tangent de $W^s(p, f)$ en un point x , noté $T_x W^s(p, f)$ de la façon suivante : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in f^{-nk}(W_U^s(p, f))$, l'espace tangent de $W^s(p, f)$ en x est l'espace tangent de $f^{-nk}(W_U^s(p, f))$ en x .

On procède de la même façon pour définir l'espace tangent d'une variété instable de p .

DÉFINITION 1.10. — Soit f un difféomorphisme symplectique d'une surface M , p et q deux points périodiques hyperboliques de f .

La sous-variété stable de p et la sous-variété instable de q sont **transverses** si pour tout $x \in W^s(p, f) \cap W^u(q, f)$, $T_x W^s(p, f) + T_x W^u(q, f) = T_x M$. (Eventuellement $W^s(p, f) \cap W^u(q, f) = \emptyset$.)

Voici un dessin qui représente une variété stable et instable transverses :



REMARQUE 1.11. — Soit f un difféomorphisme symplectique d'une surface M , p un point périodique hyperbolique de f et m un entier non nul.

Nous avons vu dans la proposition 1.5 que p est aussi un point périodique hyperbolique de f^m . Nous pouvons aussi ajouter que la variété stable [respectivement instable] de p relativement à f^m coïncide avec la variété stable [respectivement instable] de p relativement à f .

Par conséquent si p et q sont deux points périodiques hyperboliques de f tels que $W^s(p, f)$ et $W^u(q, f)$ sont transverses alors $W^s(p, f^m)$ et $W^u(q, f^m)$ sont aussi transverses.

1.2 Etude de l'espace des difféomorphismes symplectiques d'une surface

Soit (M, ω) une surface symplectique.

Notons $Diff_\omega^1(M)$ l'ensemble des difféomorphismes symplectiques de M .

Le but de ce travail est de perturber des difféomorphismes symplectiques et de montrer des propriétés génériques qui les concernent. Pour cela il faut munir $Diff_\omega^1(M)$ d'une topologie convenable.

Nous allons présenter deux topologies très classiques de $Diff_\omega^1(M)$.

• La topologie C^1 faible de Whitney

La topologie faible de Whitney sur $Diff_\omega^1(M)$ est engendrée par les ensembles définis ci-dessous :

Soit $f \in Diff_\omega^1(M)$, (U, h) et (V, k) deux cartes de M et K un compact inclus dans U tel que $f(K) \subseteq V$. Soit $\varepsilon > 0$, définissons

$$U(f; (U, h); (V, k); K; \varepsilon)$$

comme étant l'ensemble des applications $g \in Diff_\omega^1(M)$ tels que $g(K) \subseteq V$ et tels que pour tout

$x \in h(K)$:

$$\begin{aligned} \|k \circ f \circ h^{-1}(x) - k \circ g \circ h^{-1}(x)\| &< \varepsilon, \\ \|D(k \circ f \circ h^{-1})(x) - D(k \circ g \circ h^{-1})(x)\| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Les ensembles de la forme $U(f; (U, h); (V, k); K; \varepsilon)$ forment une base de voisinages de l'application f .

Si M n'est pas compacte, la topologie C^1 faible ne contrôle rien à "l'infini". Pour cela nous devons définir une autre topologie sur $\text{Diff}_\omega^1(M)$.

• **La topologie C^1 forte de Whitney**

La topologie forte de Whitney sur $\text{Diff}_\omega^1(M)$ est engendrée par les ensembles définis ci-dessous :

Soit $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$, $(U_i, h_i)_{i \in I}$ et $(V_i, k_i)_{i \in I}$ deux familles de cartes de M , $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts de M et $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ une famille de réels tels que $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts localement finie (c'est-à-dire si $x \in M$ il existe un voisinage W de x tel que l'ensemble des $i \in I$ pour lesquels $U_i \cap W \neq \emptyset$ est fini) et $f(K_i) \subseteq V_i$ quelque soit $i \in I$. Définissons

$$U(f; (U_i, h_i)_{i \in I}; (V_i, k_i)_{i \in I}; (K_i)_{i \in I}; (\varepsilon_i)_{i \in I})$$

comme étant l'ensemble des applications $g \in \text{Diff}_\omega^1(M)$ tels que $g(K_i) \subseteq V_i$ et tels que pour tout $x \in h(K_i)$:

$$\begin{aligned} \|k_i \circ f \circ h_i^{-1}(x) - k_i \circ g \circ h_i^{-1}(x)\| &< \varepsilon_i, \\ \|D(k_i \circ f \circ h_i^{-1})(x) - D(k_i \circ g \circ h_i^{-1})(x)\| &< \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Les ensembles de la forme $U(f; (U_i, h_i)_{i \in I}; (V_i, k_i)_{i \in I}; (K_i)_{i \in I}; (\varepsilon_i)_{i \in I})$ forment une base de voisinages de l'application f .

REMARQUE 1.12. — Si M est compact ces deux topologies coïncident avec la topologie C^1 uniforme.

REMARQUE 1.13. — Si M n'est pas compacte, la topologie forte de Whitney est plus fine que la topologie faible. En conséquence :

1. un ouvert [respectivement un fermé] pour la topologie faible est un ouvert [respectivement un fermé] pour la topologie forte.
2. une partie dense pour la topologie forte est une partie dense pour la topologie faible.

REMARQUE 1.14. — Soit K un compact de M et U un ouvert de M . L'ensemble des applications $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$ tels que $f(K) \subseteq U$ est un ouvert de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ pour les deux topologies faible et forte.

PROPOSITION 1.15. — L'ensemble $\text{Diff}_\omega^1(M)$ muni de la topologie forte de Whitney est un espace de Baire.

Désormais, sauf mention contraire, l'espace $\text{Diff}_\omega^1(M)$ est muni de la topologie forte de Whitney.

• Quelques G_δ denses de $\text{Diff}_\omega^1(M)$

Soit $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$. Considérons les deux propriétés suivantes :

- $\mathcal{D}(f)$: les points périodiques de f sont non dégénérés, c'est-à-dire si x est un point k périodique de f , une racine de l'unité n'est pas valeur propre de $Df^k(x)$.
- $\mathcal{T}(f)$: les variétés stables et les variétés instables des points périodiques hyperboliques de f sont transverses.

REMARQUE 1.16. D'après la propriété 1.5 et 1.11 et si m est un entier non nul, nous avons les équivalences suivantes :

$$\mathcal{D}(f) \text{ est vraie} \iff \mathcal{D}(f^m) \text{ est vraie.}$$

$$\mathcal{T}(f) \text{ est vraie} \iff \mathcal{T}(f^m) \text{ est vraie.}$$

Voici deux G_δ denses de $\text{Diff}_\omega^1(M)$. Pour une preuve de ces résultats, nous renvoyons à [Ro70]

PROPOSITION 1.17. — Soit (M, ω) une surface symplectique.

1. Il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$, noté $\mathcal{G}_d(M)$, dont les éléments vérifient la propriété $\mathcal{D}(f)$.
2. Il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$, noté $\mathcal{G}_t(M)$, dont les éléments vérifient la propriété $\mathcal{T}(f)$.

1.3 Le Connecting Lemma

Le C^1 Connecting Lemma, après le Closing Lemma, s'inscrit dans l'histoire des résultats perturbatifs. Il permet de créer des connexions à l'aide de perturbations de difféomorphismes en topologie C^1 . Dans le cas d'une variété compacte, la démonstration de ce résultat est due à S.Hayashi en 1997 (cf. [Ha97]). Dans le cas où M n'est pas compacte, le résultat est dû à M.-C.Arnaud (voir [Ar01]). Il s'appuie sur un résultat algébrique de C.Pugh que ce dernier utilise pour démontrer le Closing Lemma en 1967 dans [Pu67].

C'est ici que travailler en topologie C^1 a toute son importance. En effet le Connecting Lemma n'est démontré qu'en topologie C^1 , la difficulté du Connecting Lemma résidant justement dans le fait que les perturbations doivent être faite en topologie C^1 et que l'on doit contrôler les différentielles de ces perturbations. Il faut remarquer que tout le reste de ce travail, si ce n'est ce qui touche au Connecting Lemma et ce n'est pas le moindre, pourrait s'adapter assez facilement à des topologies de classe plus élevée.

Le Connecting Lemma constitue avec le Closing Lemma, un outil essentiel pour obtenir des propriétés C^1 génériques pour les difféomorphismes (cf. [Ar01] ou [ABC05]), certaines que nous utiliserons largement. C'est lui qui nous permettra, à notre tour, de démontrer qu'un difféomorphisme symplectique générique d'une surface possède des points périodiques sur ses courbes invariantes. Nous l'appliquerons pour casser les courbes invariantes dont les images ne possèdent pas de points périodiques.

• **Enoncé du Connecting Lemma**

THÉOREME 1.18. — Soit (M, ω) une surface symplectique compacte ou non. Soit $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$ et x un point non périodique pour f dont l'orbite positive possède une valeur d'adhérence.

Soit \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$.

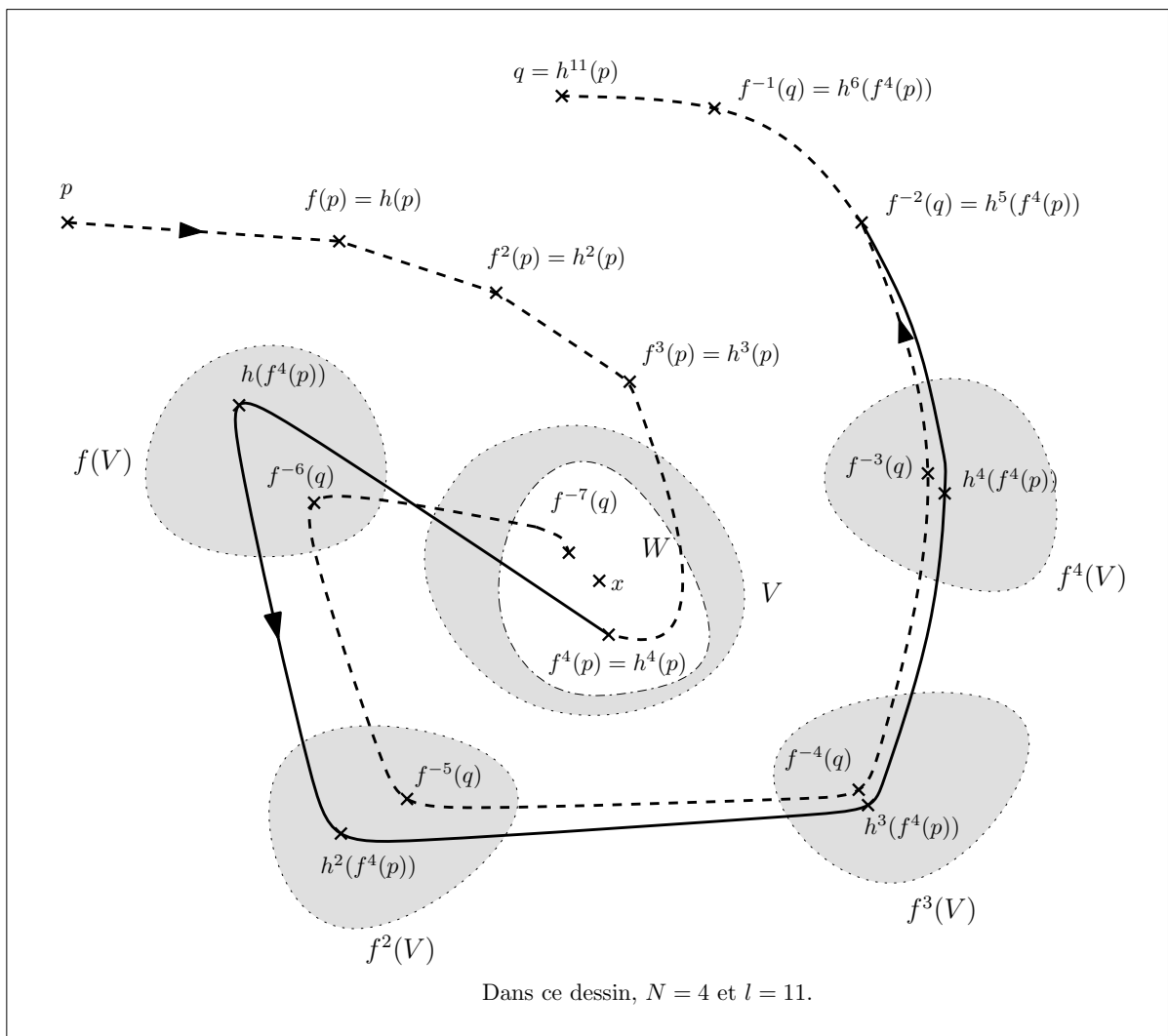
Il existe alors $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout voisinage V de x , il existe W un voisinage de x inclus dans V vérifiant :

si p et q sont deux points de M tels que :

- ni p ni q n'appartient à $\bigcup_{k=0}^{N-1} f^k(V)$,
- il existe $n_p, n_q \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_p}(p)$ et $f^{-n_q}(q) \in W$,

il existe alors $h \in \mathcal{U}$ tel que le point q est sur l'orbite positive de p sous h en transitant par V et tel que $h = f$ hors de $\bigcup_{k=0}^{N-1} f^k(V)$.

De plus, soit $l \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ tel que $q = h^l(p)$ alors $\{h(p), \dots, h^{l-1}(p)\}$ est inclus dans $(\bigcup_{k=1}^{N-1} f^k(V)) \cup \{f(p), \dots, f^{n_p}(p)\} \cup \{f^{-n_q}(q), \dots, f^{-1}(q)\}$.



• Quelques résultats de généricité issus du Connecting Lemma

Voici les deux résultats de généricité, déjà présentés dans l'introduction, résultats qui ont été démontrés à l'aide du Connecting Lemma par C. Bonatti et S. Crovisier dans [BC04] pour le premier, par M.-C. Anaud, C. Bonatti et S. Crovisier dans [ABC05] pour le second.

THÉOREME 1.19. — Soit (M, ω) une surface symplectique.

1. Si M est compacte, il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$, noté \mathcal{G}_1 , dont les éléments possèdent une orbite dense.
2. Si M n'est pas compacte, il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$, noté \mathcal{G}_2 , tel que si f appartient \mathcal{G}_2 alors l'ensemble des points dont l'orbite positive sous f sort de tous compacts est dense dans M .

REMARQUE 1.20. — La première assertion du théorème ci-dessus indique qu'un difféomorphisme f C^1 -générique possède un point p dont l'orbite entière $(f^n(p))_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense. Vérifions que cela implique qu'un tel difféomorphisme possède un point p_1 et un point p_2 dont les orbites respectivement négative et positive sont denses.

En effet, l'orbite positive ou l'orbite négative de p est nécessairement dense. Supposons alors que l'orbite positive de p ne l'est pas. Le cas où c'est l'orbite négative de p qui n'est pas dense, on procède de la même façon.

Posons $p_1 = p$ et cherchons un autre point, p_2 , tel que $(f^n(p_2))_{n \in \mathbb{N}}$ est dense. Pour cela fixons une base dénombrable de voisinages ouverts $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la surface M . Soit k un entier naturel, l'orbite négative de p rencontre U_k . Il existe donc un entier naturel n_0 tel que $f^{-n_0}(p)$ appartient à U_k . Ainsi

$$(f^{-n}(p))_{n \geq n_0} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U_k).$$

Or $(f^{-n}(p))_{n \geq n_0}$ est dense. Par conséquent, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U_k)$ est un ouvert dense. Comme M est un espace de Baire,

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U_k) \neq \emptyset.$$

On prend alors un point p_2 dans cet ensemble. Pour ce point et pour tout entier naturel k , il existe un entier naturel n tel que $f^n(p_2)$ appartient à U_k . Ce qui signifie que l'orbite positive de p_2 est dense dans M .

REMARQUE 1.21. — Dans le cas où M n'est pas compacte, un difféomorphisme symplectique générique possède non seulement un ensemble dense dont les points ont une orbite positive qui sort de tous compacts mais aussi un ensemble dense dont les points ont une orbite négative qui sort de tous compacts.

Pour vérifier cela, considérons l'application $I : f \in \text{Diff}_\omega^1(M) \mapsto f^{-1}$ qui est un homéomorphisme. L'ensemble $I(\mathcal{G}_2)$ est encore un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ et ses éléments possèdent un ensemble dense de points dont l'orbite négative sort de tous compacts. Il suffit alors de prendre les éléments de $I(\mathcal{G}_2) \cap \mathcal{G}_2$ qui est encore un G_δ dense puisque $\text{Diff}_\omega^1(M)$ étant un espace de Baire.

Notation : Nous noterons \mathcal{G}_1 et $I(\mathcal{G}_2) \cap \mathcal{G}_2$ par $\mathcal{G}_\infty(M)$ selon que M est compacte ou non.

• **Une première application simple sur les courbes fermées simples du plan de l'anneau ou de la sphère**

PROPOSITION 1.22. — Soit $f \in \mathcal{G}_\infty(M)$,

1. Si $M = \mathbb{R}^2$ alors f ne possède pas de courbes invariantes.
2. Si $M = \mathbb{A}$ et si f possède une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{A}$ fermée simple invariante alors γ est une courbe essentielle de \mathbb{A} .
3. Si $M = \mathbb{S}^2$ et si f possède une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ fermée simple invariante alors f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Démonstration. —

1. Soit f un difféomorphisme symplectique du plan possédant une courbe fermée simple invariante. Nous l'avons déjà vu au chapitre 1, $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède deux composantes connexes dont l'une est bornée. Chacune de ces composantes est alors invariante par f . Par conséquent si un point appartient à la composante bornée, son orbite y est contenue. Cette composante bornée est donc un ouvert dont les points ont une orbite contenue dans un compact. Le difféomorphisme f ne peut donc appartenir $\mathcal{G}_\infty(\mathbb{R}^2)$.

2. C'est la même preuve que pour la première assertion, puisque si γ est une courbe fermée simple de l'anneau qui n'est pas essentielle, $\mathbb{A} \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède deux composantes connexes dont l'une est bornée...

3. Soit $f \in \mathcal{G}_\infty(\mathbb{S}^2)$ possédant une courbe fermée simple γ . D'après le théorème de Jordan (cf. chapitre 1), $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède deux composantes connexes. De plus f appartenant à $\mathcal{G}_\infty(\mathbb{S}^2)$, il existe un point dont l'orbite sous f est dense. Les composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ ne peuvent donc être invariantes par f . Or f préserve l'orientation topologique de la sphère. Par conséquent d'après la proposition 2.37 du chapitre 1, f renverse l'orientation de γ . Ainsi d'après la proposition 2.34 du même chapitre 1, f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$. \square

1.4 A propos des courbes invariantes des difféomorphismes symplectiques exacts ou non de l'anneau

Plaçons nous dans l'espace des difféomorphismes symplectiques de l'anneau homotopes à l'identité, noté $\text{Diff}_\omega^{1+}(M)$.

Rappelons que les difféomorphismes symplectiques exacts de l'anneau sont les difféomorphismes de l'anneau f tels que $f^*rd\theta - rd\theta$ est exacte.

Voici une proposition qui caractérise les difféomorphismes symplectiques exacts de l'anneau homotopes à l'identité :

PROPOSITION 1.23. — Soit f un difféomorphisme symplectique de l'anneau. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'application f est exacte.
2. Pour toute courbe γ fermée simple essentielle, $\int_{\gamma} rd\theta = \int_{f \circ \gamma} rd\theta$.
3. Il existe une courbe γ fermée simple essentielle, $\int_{\gamma} rd\theta = \int_{f \circ \gamma} rd\theta$.

Démonstration. — Soit f un difféomorphisme symplectique. La 1-forme $f^*rd\theta - rd\theta$ est fermée. Il existe donc $\lambda : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et un réel a tel que

$$f^*rd\theta - rd\theta = d\lambda + ad\theta.$$

L'application est exacte symplectique si et seulement si $a = 0$. Ainsi si $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{A}$ est une courbe fermée simple essentielle :

$$\int_{\gamma} rd\theta - \int_{f \circ \gamma} rd\theta = \int_{\gamma} rd\theta - \int_{\gamma} f^*rd\theta = \int_{\gamma} d\lambda + ad\theta = a \int_{\gamma} d\theta = \pm a.$$

D'où les trois équivalences. □

Nous pouvons tout d'abord déduire de cette proposition, qu'un difféomorphisme symplectique homotope à l'identité qui n'est pas exact n'admet pas de courbes invariantes. Or :

PROPOSITION 1.24. — *L'ensemble des difféomorphismes de l'anneau symplectiques exacts homotopes à l'identité est un fermé d'intérieur vide pour la topologie faible de Whitney.*

Démonstration. — Considérons la courbe fermée simple essentielle de l'anneau $\gamma_0 : \theta \in \mathbb{T}^1 \rightarrow (\theta, 0)$,

$$\int_{\gamma_0} rd\theta = 0.$$

Ainsi d'après la proposition 1.23, l'ensemble des difféomorphismes de l'anneau symplectiques exacts homotopes à l'identité est l'ensemble des éléments de $Diff_{\omega}^{1+}(M)$ qui vérifient :

$$\int_{f \circ \gamma_0} rd\theta = 0. \quad (\star)$$

C'est donc un fermé de $Diff_{\omega}^{1+}(M)$. Reste à démontrer qu'il est d'intérieur vide. Soit f un difféomorphisme de l'anneau symplectique exact homotope à l'identité et \mathcal{U} un voisinage pour la topologie faible dans $Diff_{\omega}^{1+}(M)$.

Posons $f(\theta, r) = (f_1(\theta, r), f_2(\theta, r))$.

Soit $a > 0$ et considérons l'application f_a définie par $f_a(\theta, r) = (f_1(\theta, r), f_2(\theta, r) + a)$.

L'application f_a est un difféomorphisme symplectique homotope à l'identité. Elle est symplectique car

$$f_a^*rd\theta = (f_2 + a)df_1 = adf_1 + f_2df_1 = adf_1 + f^*rd\theta,$$

donc

$$d(rd\theta - f_a^*rd\theta) = d(adf_1 + f^*d\theta - rd\theta) = 0.$$

Mais f_a n'est pas exacte car d'une part :

$$\int_{f_a \circ \gamma_0} rd\theta = \int_{\gamma_0} f_a^* d\theta = \int_{\gamma_0} f^* rd\theta + \int_{\gamma_0} adf_1 = \int_{\gamma_0} adf_1 = \int_{f \circ \gamma_0} ad\theta.$$

D'autre part f étant homotope à l'identité, les courbes γ_0 et $f \circ \gamma_0$ sont homotopes donc

$$\int_{f \circ \gamma_0} ad\theta = \int_{\gamma_0} ad\theta = 1.$$

Ainsi $\int_{f_a \circ \gamma_0} rd\theta \neq 0$. Ce qui indique d'après (\star) que f_a n'est pas exacte.

Or si a est suffisamment petit, f_a appartient à \mathcal{U} . Ceci démontre bien que l'ensemble des difféomorphismes de l'anneau symplectiques, exacts et homotopes à l'identité, est d'intérieur vide pour la topologie faible de Whitney. \square

En conséquence pour la topologie faible de Whitney, l'ensemble des difféomorphismes de l'anneau, symplectiques, homotopes à l'identité et qui ne sont pas exacts, est un ouvert dense dont les éléments n'admettent aucune courbe fermée simple essentielle.

Ceci est faux si on travaille avec la topologie forte de Whitney. En effet

PROPOSITION 1.25. — *L'ensemble des difféomorphismes de l'anneau symplectiques exacts homotopes à l'identité est à la fois fermé et ouvert pour la topologie forte de Whitney.*

Démonstration. — Le fait que l'ensemble des difféomorphismes de l'anneau symplectiques exacts homotopes à l'identité est fermé pour la topologie forte de Whitney vient du fait qu'il en est un pour la topologie faible.

Notation : Si f est une application de l'anneau, nous noterons $f_1 : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{T}^1$ sa première composante et $f_2 : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ sa seconde composante.

Soit f un difféomorphisme de l'anneau symplectique exact homotope à l'identité et \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^+(M)$ dont les éléments g vérifient pour tout $(\theta, r) \in \mathbb{T}^1$,

$$\|g_2(\theta, r) - f_2(\theta, r)\| < \frac{1}{r^2 + 1},$$

$$\|dg_1(\theta, r) - df_1(\theta, r)\| < \frac{1}{r^2 + 1}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$, considérons la courbe fermée simple essentielle de l'anneau $\gamma_a : \theta \in \mathbb{T}^1 \rightarrow (\theta, a) \in \mathcal{U}$. Soit $g \in \mathcal{U}$. Alors :

$$\int_{\gamma_a} rd\theta - g_2 dg_1 = \int_{\gamma_a} rd\theta - f_2 df_1 + \int_{\gamma_a} f_2 df_1 - g_2 dg_1 = \int_{\gamma_a} f_2 df_1 - g_2 dg_1.$$

Or d'une part comme $g \in \mathcal{U}$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_a} f_2 df_1 - g_2 dg_1 = 0$.

D'autre part, pour tout réel a , $\int_{\gamma_a} rd\theta - g_2 dg_1 = \int_{\gamma_0} rd\theta - g_2 dg_1$ parce que γ_a et γ_0 sont homotopes et parce que la 1-forme $rd\theta - g_2 dg_1$ est fermée, g étant symplectique. Donc

$$\int_{\gamma_0} rd\theta - g_2 dg_1 = 0.$$

Par conséquent d'après (\star) , g est exact.

L'ouvert \mathcal{U} est donc inclus dans l'ensemble des difféomorphismes de l'anneau, symplectiques, exacts et homotopes à l'identité, lequel est donc bien un ensemble ouvert dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ muni de la topologie C^1 forte de Whitney. \square

2 Une conséquence du Connecting Lemma sur l'étude des courbes invariantes par un difféomorphisme symplectique générique

Dans ce paragraphe, nous allons construire un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ tel que si f possède une courbe fermée simple γ invariante alors f possède au moins un point périodique sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

PROPOSITION 2.1. — *Il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ noté $\mathcal{G}_p(M)$ tel que si $f \in \mathcal{G}_p(M)$ admet une courbe fermée simple invariante γ alors f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.*

La proposition 1.22 démontre que dans le cadre d'un anneau A , il existe un G_δ dense de difféomorphismes que nous avons noté $\mathcal{G}_\infty(A)$ tel que si l'un de ses éléments possède une courbe fermée simple γ invariante, cette courbe est une courbe essentielle de A . Cela nous incite dans un premier temps à travailler dans l'anneau \mathbb{A} de manière à pouvoir utiliser ce résultat.

Puis nous généraliserons dans un second temps à une surface quelconque. Pour cela nous travaillerons à l'aide d'une famille dénombrable d'anneaux constituant une base de voisinages des courbes, famille construite au paragraphe 3 du chapitre 1. Nous utiliserons alors les méthodes employées dans le cas de l'anneau.

2.1 Cas de l'anneau

• Appliquons le Connecting Lemma

LEMME 2.2. — *Soit f un difféomorphisme symplectique de l'anneau appartenant à $\mathcal{G}_\infty(\mathbb{A})$ et $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{A}$ une courbe fermée essentielle invariante par f sur laquelle f ne possède pas de point périodique. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma(\mathbb{T}^1) \subseteq \mathbb{T}^1 \times]-n; n[$ et \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(\mathbb{A})$. Il existe alors $g \in \mathcal{U}$, $p \in \mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $g^m(p) \in \mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$.*

Démonstration. — Soit C_1 et C_2 les deux composantes connexes de $\mathbb{A} \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$. La courbe γ étant une courbe essentielle, C_1 et C_2 ne sont pas bornées. L'une contient donc $\mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ tandis que l'autre contient $\mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$. Supposons que c'est C_1 qui contient $\mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$, C_2 contient alors $\mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$. Rappelons que $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est la frontière à la fois de C_1 et de C_2 .

L'idée est d'appliquer le Connecting Lemma au voisinage d'un point de la courbe.

Soit $x \in \gamma(\mathbb{T}^1)$. Ce point n'est pas périodique puisque f ne possède pas de points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$. De plus, son orbite positive possède une valeur d'adhérence puisqu'elle est contenue dans le compact $\gamma(\mathbb{T}^1)$. En outre, l'ensemble $\mathbb{T}^1 \times [-n; n]$ est un voisinage de x . D'après le Connecting Lemma, il existe $N \in \mathbb{N}$ et W un voisinage ouvert de x tels que s'il existe deux points p et q n'appartenant pas à $\bigcup_{k=0}^{N-1} f^k(\mathbb{T}^1 \times [-n; n])$ et s'il existe n_p et n_q des entiers positifs tels que $f^{n_p}(p)$ et $f^{-n_q}(q)$ n'appartiennent pas à W il existe alors $h \in \mathcal{U}$ et un entier m tel que $h^m(p) = q$.

Cherchons donc de tels points p et q et de tels entiers entiers n_p et n_q .

D'une part le point x appartient à la fois à la frontière de C_1 et à celle de C_2 . Les ouverts $C_1 \cap W$ et $C_2 \cap W$ sont donc non vides.

D'autre part l'application f appartient à $\mathcal{G}_\infty(\mathbb{A})$. L'ensemble des points dont les orbites positives et négatives sous f sortent de tous compacts est dense dans M .

De plus, l'ensemble $K = \bigcup_{k=0}^{N-1} f^k(\mathbb{T}^1 \times [-n; n])$ est compact.

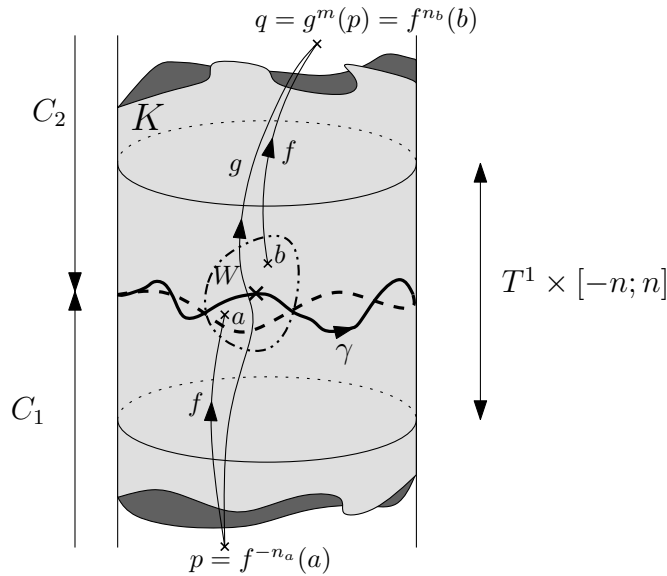
Il existe donc $a \in C_1 \cap W$ et $b \in C_2 \cap W$ tels que l'orbite négative de a et l'orbite positive de b sort de K . Soit n_a et n_b deux entiers positifs tels que $f^{-n_a}(a)$ et $f^{n_b}(b)$ n'appartiennent pas à K (cf. schéma ci-dessous).

Posons alors :

$$p = f^{-n_a}(a) \text{ et } q = f^{n_b}(b),$$

$$n_p = n_a \text{ et } n_q = n_b.$$

Il existe donc $g \in \mathcal{U}$ et un entier m tel que $g^m(p) = q$. Il reste donc à vérifier que $p \in \mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ et $q \in \mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$.



Or d'une part les points $p = f^{-n_a}(a)$ et $q = f^{n_b}(b)$ n'appartiennent pas à K et $\mathbb{T}^1 \times [-n; n]$ est inclus dans K . Donc p et q appartiennent à $\mathbb{T}^1 \times (]-\infty; -n[\cup]n; +\infty[)$.

D'autre part, l'application f ne possède pas de points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$. Ce qui implique, d'après la proposition 2.34 du chapitre 1, que f préserve l'orientation de γ . Or f étant un difféomorphisme symplectique, d'après la remarque 2.29, f préserve l'orientation au sens topologique. D'après la proposition 2.37 du chapitre 1, f préserve chacune des composantes connexes de $\mathbb{A} \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$. Par conséquent $f(C_1) = C_1$ et $f(C_2) = C_2$. Le point $p = f^{-n_a}(a)$ appartient donc à C_1 tandis que le point $q = f^{n_b}(b)$ appartient à C_2 .

Comme $\mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ et $\mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$ sont inclus respectivement dans C_1 et C_2 , le point p appartient à $\mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ alors que le point q appartient à $\mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$. \square

REMARQUE 2.3. — L'hypothèse que f ne possède pas de points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est trop forte. En fait, nous avons seulement besoin

1. que l'application f préserve l'orientation de la courbe γ de façon à ce que chacune des composantes connexes du complémentaire de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ soit invariante,
2. que f possède sur la courbe au moins un point non périodique sachant que cette dernière hypothèse est vérifiée si f appartient à $\mathcal{G}_d(\mathbb{A})$. En effet les points périodiques de f appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$ sont tous de même période puisque f préserve l'orientation de la courbe. Or si f appartient à $\mathcal{G}_d(\mathbb{A})$, ses points périodiques sont non dégénérés. Ainsi d'après la proposition 1.7, l'ensemble de ceux qui sont de période inférieure ou égale à un entier donné constitue un ensemble de points isolés qui est un fermé. L'image de γ contient donc un nombre fini de points périodiques. Elle en possède donc au moins un qui ne l'est pas.

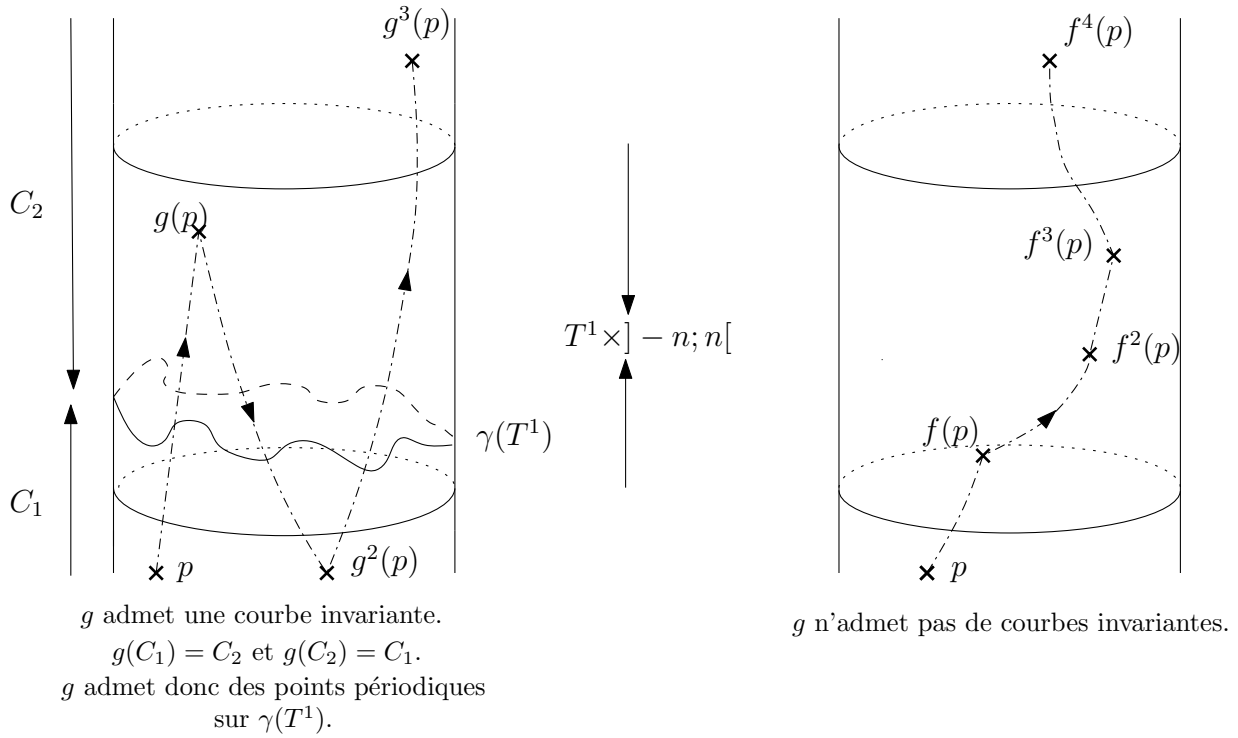
Supposer que f ne possède pas de points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ assure de ces deux hypothèses à la fois et surtout fait le pendant avec la conclusion du lemme suivant.

LEMME 2.4. — Soit g un difféomorphisme symplectique de l'anneau et $n \in \mathbb{N}$. S'il existe $p \in \mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $g^m(p) \in \mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$ et s'il existe une courbe γ fermée simple essentielle invariante par g dont l'image $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est inclus dans $\mathbb{T}^1 \times]-n; n[$ alors g possède des points fixes sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Démonstration. — Comme dans la démonstration du lemme précédent, notons C_1 la composante connexe contenant $\mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ et C_2 la composante connexe de $\mathbb{A} \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ contenant $\mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$. Par hypothèse, il existe une orbite sous f qui vient de $\mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ qui va dans $\mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$. Il existe donc un point $x \in C_1$ dont l'image par f appartient à C_2 .

L'application f échange donc les deux composantes connexes de $\mathbb{A} \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$. Par conséquent d'après la proposition 2.37 du chapitre 1, elle renverse l'orientation de γ . Ainsi d'après la proposition 2.34 du même chapitre 1, elle possède des points fixes sur γ . \square

Voici un schéma qui représente les deux façons qu'un difféomorphisme symplectique g a de vérifier la propriété suivante : “ il existe $p \in \mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $g^m(p) \in \mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$ ” :



• **Construction du G_δ dense**

Soit n un entier non nul et f un difféomorphisme symplectique de l'anneau \mathbb{A} .

Considérons les deux propositions suivantes :

- $\mathcal{Q}_1(f, n)$: il existe un voisinage \mathcal{U} de f tel que si g appartient à $\mathcal{U} \cap \mathcal{G}_\infty(\mathbb{A})$ alors g ne laisse invariante aucune courbe fermée simple dont l'image est contenue dans $\mathbb{T}^1 \times] - n; n[$ ou g possède des points périodiques sur toute courbe fermée simple qu'il laisse invariante et dont l'image est incluse dans $\mathbb{T}^1 \times] - n; n[$.
- $\mathcal{Q}_2(f, n)$: il existe $p \in \mathbb{T}^1 \times] - \infty; -n[$ et un entier m tels que $f^m(p) \in \mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$.

Considérons \mathcal{O}_n l'ensemble des difféomorphismes symplectiques de l'anneau tels que $\mathcal{Q}_1(f, n)$ ou $\mathcal{Q}_2(f, n)$ est vraie.

Nous allons montrer que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{O}_n est un ouvert dense de $\text{Diff}_\omega^1(\mathbb{A})$,
2. si $f \in (\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_n) \cap \mathcal{G}_\infty(\mathbb{A})$ et si f laisse invariante une courbe fermée simple γ alors γ est une courbe essentielle et f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Il suffit alors de poser :

$$\mathcal{G}_p(\mathbb{A}) = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_n \right) \cap \mathcal{G}_\infty(\mathbb{A}).$$

Comme $\text{Diff}_\omega^1(\mathbb{A})$ est un espace de Baire, $\mathcal{G}_p(\mathbb{A})$ est un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(\mathbb{A})$. Démontrons donc les deux points ci-dessus.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, démontrons que \mathcal{O}_n est un ouvert dense de $\text{Diff}_\omega^1(\mathbb{A})$.

• L'ensemble \mathcal{O}_n est ouvert :

Soit $f \in \mathcal{O}_n$. Si $\mathcal{Q}_1(f, n)$ est vraie, le voisinage \mathcal{U} de f donné par cette proposition est inclus dans \mathcal{O}_n . Sinon c'est $\mathcal{Q}_2(f, n)$ qui est vraie. Soit $p \in \mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ et m un entier donnés par la proposition $\mathcal{Q}_2(f, n)$ tels que $f^m(p) \in \mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$. Considérons alors l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \text{Diff}_\omega^1(\mathbb{A}) &\longrightarrow \mathbb{A} \\ g &\longmapsto g^m(p) \end{aligned}$$

L'application ϕ est continue et $\phi(f) = f^m(p)$ appartient à l'ouvert $\mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$. Il existe donc \mathcal{U} un voisinage de f tel que pour tout $g \in \mathcal{U}$, $\phi(g) = g^m(p)$ appartient à cet ouvert, ce qui signifie que $\mathcal{Q}_2(g, n)$ est vraie. Le voisinage \mathcal{U} est donc inclus dans \mathcal{O}_n .

Dans les deux cas, l'ensemble \mathcal{O}_n est un voisinage de f . Il est donc bien un ouvert de $\text{Diff}_\omega^1(\mathbb{A})$.

• Densité de \mathcal{O}_n :

Soit \mathcal{O} un ouvert de $\text{Diff}_\omega^1(\mathbb{A})$. S'il existe $f \in \mathcal{O}$ tel que $\mathcal{Q}_1(f, n)$ est vraie alors $f \in \mathcal{O}_n$ et $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_n \neq \emptyset$. Sinon cherchons à l'aide du lemme 2.2 une application f dans \mathcal{O} tel que $\mathcal{Q}_2(f, n)$ est vraie.

Soit $g \in \mathcal{O}$ tel que $\mathcal{Q}_1(g, n)$ est fautive. Il existe donc $h \in \mathcal{O} \cap \mathcal{G}_\infty(\mathbb{A})$ et $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{A}$ une courbe fermée simple invariante par h tels que :

- l'image $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est contenue dans $\mathbb{T}^1 \times]-n; n[$,
- l'application h ne possède pas de points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Comme $h \in \mathcal{G}_\infty(\mathbb{A})$, la courbe γ est une courbe essentielle. D'après le lemme 2.2, il existe $f \in \mathcal{O}$, $p \in \mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $f^m(p) \in \mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$. Ce qui signifie que $\mathcal{Q}_2(f, n)$ est vraie. Par conséquent $f \in \mathcal{O}_n$ et $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_n \neq \emptyset$.

L'ouvert \mathcal{O}_n est donc dense dans $\text{Diff}_\omega^1(\mathbb{A})$.

2. Soit $f \in \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_n \right) \cap \mathcal{G}_\infty(\mathbb{A})$. Supposons que f laisse invariante une courbe γ fermée simple.

La courbe γ est une courbe essentielle car $f \in \mathcal{G}_\infty(\mathbb{A})$. Il suffit donc de démontrer que f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

L'ensemble $\gamma(\mathbb{T}^1)$ étant compact, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est inclus dans $\mathbb{T}^1 \times]-n; n[$. Or f appartient à $\mathcal{O}_n \cap \mathcal{G}_\infty(\mathbb{A})$. Donc $\mathcal{Q}_1(f, n)$ ou $\mathcal{Q}_2(f, n)$ est vraie.

Si c'est $\mathcal{Q}_1(f, n)$ qui est vraie, l'application f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$. Sinon il existe $p \in \mathbb{T}^1 \times]-\infty; -n[$ et un entier m tels que $f^m(p) \in \mathbb{T}^1 \times]n; +\infty[$. D'après le lemme 2.4, l'application f possède dans ce cas aussi des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

2.2 Cas d'une surface quelconque

- Appliquons le Connecting Lemma

Notation : Soit A et B deux anneaux tels que B est un sous anneau essentiel de A . Si de plus l'anneau B est relativement compact dans A , nous noterons $B \prec A$ ou $A \succ B$.

Rappel : Soit A et B deux anneaux tels que $B \prec A$. D'après la propriété 2.22 du chapitre 1, l'ensemble $A \setminus B$ possède exactement deux composantes connexes qui sont d'intérieur non vide que nous noterons $A(B, 1)$ et $A(B, 2)$.

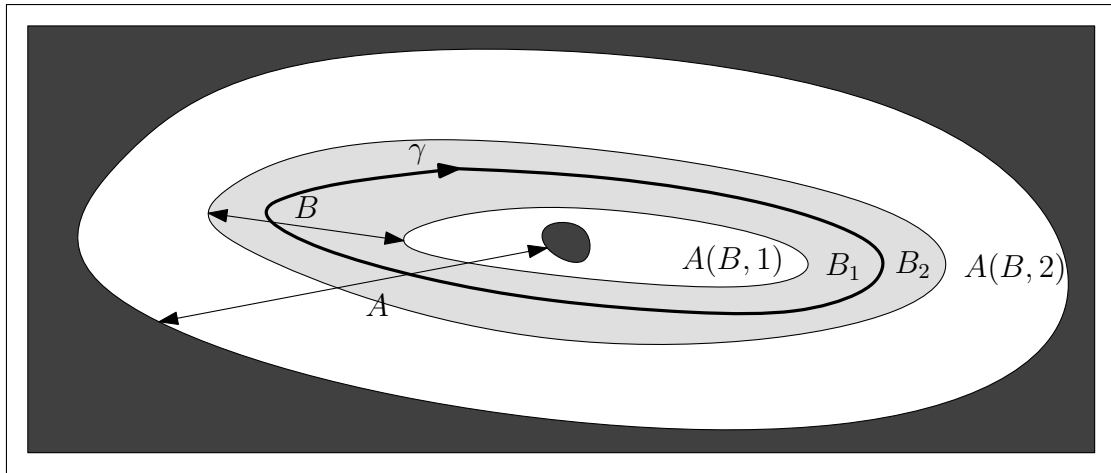
LEMME 2.5. — Soit f un difféomorphisme symplectique d'une surface symplectique (M, ω) et $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple invariante par f sur laquelle f ne possède pas de points périodiques.

Soit A et B deux anneaux inclus dans M tels que $B \prec A$ et $f(B) \cup f^{-1}(B) \subseteq A$. Supposons que γ est une courbe essentielle de B . Soit \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$.

Il existe alors une application g dans \mathcal{U} , un point p dans $A(B, 1)$ et un entier m plus grand ou égal à 2 tels que le point $g^m(p)$ appartient à l'intérieur de $A(B, 2)$ et tels que pour tout $k \in \{1, \dots, m-1\}$, le point $g^k(p)$ appartient à B .

Démonstration. — la courbe γ est une courbe essentielle de B et A est un sous anneau essentiel de A . Les ensembles $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ et $B \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possèdent donc chacun deux composantes connexes. Notons A_1 et A_2 les deux composantes connexes de $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ contenant respectivement $A(B, 1)$ et $A(B, 2)$ puis B_1 et B_2 celles de $B \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ contenues respectivement dans A_1 et A_2 .

Remarquons alors que $A_i \setminus \overline{B}$ est inclus dans l'intérieur de $A(B, i)$ pour $i = 1$ ou 2 .



Nous allons appliquer, comme pour la preuve du lemme 2.2, le Connecting Lemma au voisinage de l'un des points de la courbe. Mais ici nous allons l'appliquer de façon plus précise et en particulier nous devons utiliser l'uniformité de l'entier N devant le voisinage V de façon à s'assurer que l'on ne sorte pas de l'anneau A , problème qui ne se pose pas lorsque la surface tout entière joue le rôle de l'anneau A .

Soit $x \in \gamma(\mathbb{T}^1)$. Ce point n'est pas périodique puisque f ne possède pas de points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$. D'après le Connecting Lemma, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout voisinage V de x , il existe un voisinage W de x inclus dans V tel que s'il existe deux points p et q n'appartenant pas à $\bigcup_{k=0}^{N-1} f^k(V)$ et s'il existe n_p et n_q des entiers positifs tels que $f^{n_p}(p)$ et $f^{-n_q}(q)$ appartiennent à W , il existe alors $h \in \mathcal{U}$ et un entier m tel que $h^m(p) = q$ et $\{h(p), \dots, h^{m-1}(p)\}$ est inclus dans $(\bigcup_{k=1}^{N-1} f^k(V)) \cup \{f(p), \dots, f^{n_p}(p)\} \cup \{f^{-n_q}(q), \dots, f^{-1}(q)\}$.

Cherchons donc un voisinage V , des points p et q et des entiers n_p et n_q qui conviennent.

Soit V un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ tel que $\bigcup_{k=0}^{N-1} f^k(V)$ est inclus dans B . Un tel voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ existe car $f(\gamma(\mathbb{T}^1)) = \gamma(\mathbb{T}^1)$, car B est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ et car f est continue. Soit W un voisinage ouvert de x inclus dans V donné par le Connecting Lemma.

Le point x appartient à la fois à la frontière de B_1 et à celle de B_2 . Les ouverts $B_1 \cap W$ et $B_2 \cap W$ sont donc non vides.

D'autre part l'application f appartient à $\mathcal{G}_\infty(M)$.

- Si M est compact, il existe un point de la surface dont l'orbite positive est dense et un point dont l'orbite négative est dense. Il existe donc $a \in B_1 \cap W$ et $b \in B_2 \cap W$ tel que l'orbite négative de a et l'orbite positive de b rencontrent l'ouvert $A \setminus \overline{B}$.

- Si M n'est pas compacte, l'ensemble des points dont les orbites positives et négatives sous f sortent de tous compacts est dense dans M .

De plus, \overline{B} est compact.

Il existe donc $a \in B_1 \cap W$ et $b \in B_2 \cap W$ tels que l'orbite négative de a et l'orbite positive de b sort de \overline{B} .

Dans les deux cas, on peut considérer n_a et n_b les deux plus petits entiers positifs tels que $f^{-n_a}(a)$ et $f^{n_b}(b)$ n'appartiennent pas à \overline{B} . Posons alors :

$$p = f^{-n_a}(a) \text{ et } q = f^{n_b}(b),$$

$$n_p = n_a \text{ et } n_q = n_b.$$

Comme p et q n'appartiennent pas à B et que $\bigcup_{k=0}^{N-1} f^k(V) \subseteq B$, ils n'appartiennent pas à $\bigcup_{k=0}^{N-1} f^k(V)$. Il existe donc $g \in \mathcal{U}$ et un entier $m \geq 2$ tel que $g^m(p) = q$ et tel que $\{g(p), \dots, g^{m-1}(p)\}$ est inclus dans $(\bigcup_{k=1}^{N-1} f^k(V)) \cup \{f(p), \dots, f^{n_p}(p)\} \cup \{f^{-n_q}(q), \dots, f^{-1}(q)\}$.

Il reste donc à vérifier que les points p et q appartiennent respectivement à $A(B, 1)$ et à l'intérieur de $A(B, 2)$ et que pour tout $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $g^k(p)$ appartient à B .

Comme f ne possède pas de point périodique sur γ , d'après la proposition 2.34 du chapitre 1, f préserve l'orientation de la courbe γ . Ainsi d'après la proposition 2.38 du même chapitre 1,

$$f(B_1) \cup f^{-1}(B_1) \subseteq A_1 \text{ et } f(B_2) \cup f^{-1}(B_2) \subseteq A_2. \quad (\star)$$

Comme n_a et n_b sont les deux plus petits entiers positifs tels que $f^{-n_a}(a)$ et $f^{n_b}(b)$ n'appartiennent pas à B , les points $a, f(a), \dots, f^{n_a-1}(a)$ et $b, f^{-1}(b), \dots, f^{-n_b}(b)$ sont des points de B . De plus $a \in B_1$ et $b \in B_2$. D'après (\star) ,

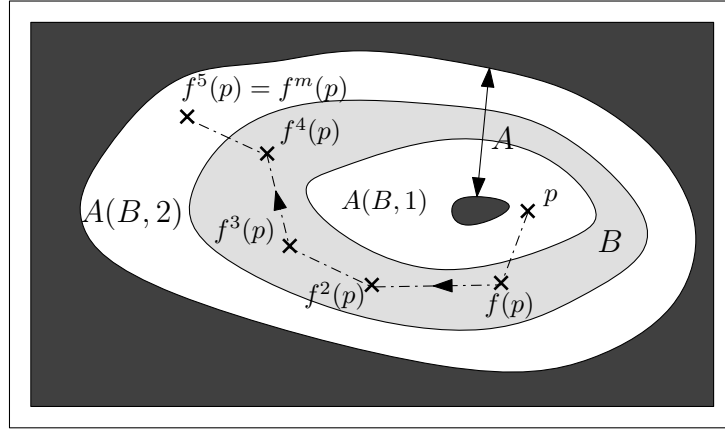
$$\{a, f(a), \dots, f^{n_a-1}(a)\} \subseteq B_1 \text{ et } \{b, f^{-1}(b), \dots, f^{-n_b}(b)\} \subseteq B_2.$$

Les points $f(p), \dots, f^{n_p}(p)$ appartiennent donc à B_1 et les points $f^{-1}(q), \dots, f^{-n_q}(q)$ à B_2 . Or p et q n'appartiennent pas à l'adhérence de B .

En utilisant encore (\star) , on obtient que $p = f^{-1}(f(p))$ appartient à $A_1 \setminus \overline{B}$ et que $q = f(f^{-1}(q))$ appartient à $A_2 \setminus \overline{B}$. Donc p et q appartiennent respectivement à $A(B, 1)$ et à l'intérieur de $A(B, 2)$.

De plus $\{g(p), \dots, g^{m-1}(p)\}$ est inclus dans $(\bigcup_{k=1}^{N-1} f^k(V)) \cup \{f(p), \dots, f^{n_p}(p)\} \cup \{f^{-n_q}(q), \dots, f^{-1}(q)\}$. Comme $\bigcup_{k=1}^{N-1} f^k(V)$ est inclus dans B , les points $g(p), \dots, g^{m-1}(p)$ appartiennent à B . \square

LEMME 2.6. — Soit g un difféomorphisme symplectique d'une surface orientée M . Soit A et B deux anneaux inclus dans M tels que $B \prec A$ et $g(B) \cup g^{-1}(B) \subseteq A$. S'il existe $p \in A(B, 1)$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ tels que $g^m(p) \in A(B, 2)$ et tels que pour tout $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $g^k(p) \in B$ et s'il existe une courbe fermée simple $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow B$ essentielle invariante par g alors g possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.



Démonstration. — la courbe γ est une courbe essentielle de B et A est un sous anneau essentiel de A . Les ensembles $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ et $B \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possèdent donc chacun deux composantes connexes. Notons A_1 et A_2 les deux composantes connexes de $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ contenant respectivement $A(B, 1)$ et $A(B, 2)$ puis B_1 et B_2 celles de $B \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ contenues respectivement dans A_1 et A_2 .

Les points $g(p), \dots, g^{m-1}(p)$ appartiennent à B et donc à $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$. Par conséquent $p, \dots, g^m(p)$ sont contenus dans $A_1 \cup A_2$. Or $p \in A_1$ et $g^m(p) \in A_2$. Il existe donc $k \in \{0, \dots, m-1\}$ tel que $g^k(p) \in A_1$ et $g^{k+1}(p) \in A_2$.

Si $k \geq 1$, le point $g^k(p)$ appartient à B_1 et $g^{k+1}(p)$ n'appartient pas à A_1 . L'ensemble $g(B_1)$ n'est pas inclus dans A_1 . Par conséquent d'après la proposition 2.38 du chapitre 1, g ne préserve pas l'orientation de la courbe γ . Ce qui implique, d'après la proposition 2.34 du même chapitre 1, que g possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Si $k = 0$, $p \in A_1$ et $g(p) \in B \cap A_2 = B_2$. L'ensemble $g^{-1}(B_2)$ n'est pas donc inclus dans A_2 . Ce qui implique comme précédemment que g^{-1} et donc g possèdent des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$. \square

• **Construction du G_δ dense**

Nous avons construit dans le troisième paragraphe du chapitre 1, une famille dénombrable d'anneaux $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que si $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ est une courbe fermée simple et si U est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ inclus dans U et tel que A_k est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Considérons \mathcal{I} l'ensemble des couples d'entiers (k, l) tels que $A_k \prec A_l$.

Notation : Soit $(k, l) \in \mathcal{I}$, les deux composantes connexes de $A_l \setminus A_k$ sont notées C_{kl}^1 et C_{kl}^2 . Elles sont toutes les deux d'intérieur non vides.

Soit $(k, l) \in \mathcal{I}$ et f un difféomorphisme symplectique de la surface M .

Considérons les deux propositions suivantes :

- $\mathcal{Q}_1(f, k, l)$: il existe un voisinage \mathcal{U} de f tel que si g appartient à $\mathcal{U} \cap \mathcal{G}_\infty(M)$ alors
 - **ou** l'application g ne laisse aucune courbe fermée simple invariante dont l'image est contenu dans A_k et qui est une courbe essentielle de A_k ,
 - **ou** l'application g possède des points périodiques sur toute courbe fermée simple qu'il laisse invariante et dont l'image est incluse dans A_k et qui est une courbe essentielle de A_k ,
 - **ou** l'ensemble $g(\overline{A_k})$ n'est pas inclus dans A_l ,
 - **ou** l'ensemble $g^{-1}(\overline{A_k})$ n'est pas inclus dans A_l .
- $\mathcal{Q}_2(f, k, l)$: les compacts $f(\overline{A_k})$ et $f^{-1}(\overline{A_k})$ sont inclus dans A_l et il existe un point p dans C_{kl}^1 et un entier m plus grand ou égal à 2 tels que $f^m(p)$ appartient à l'intérieur de C_{kl}^2 et tels que $f^j(p)$ appartient à A_k pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$.

Considérons \mathcal{O}_{kl} l'ensemble des difféomorphismes symplectiques de l'anneau tels que $\mathcal{Q}_1(f, k, l)$ ou $\mathcal{Q}_2(f, k, l)$ est vraie.

Nous allons montrer que :

1. pour tout $(k, l) \in \mathcal{I}$, \mathcal{O}_{kl} est un ouvert dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$,
2. si $f \in (\bigcap_{(k,l) \in \mathcal{I}} \mathcal{O}_{kl}) \cap \mathcal{G}_\infty(M)$ et si f laisse invariante une courbe fermée simple γ alors f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Il suffit alors de poser :

$$\mathcal{G}_p(M) = (\bigcap_{(k,l) \in \mathcal{I}} \mathcal{O}_{kl}) \cap \mathcal{G}_\infty(M).$$

Comme $\text{Diff}_\omega^1(M)$ est un espace de Baire, $\mathcal{G}_p(M)$ est un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$. Démontrons donc les deux points ci-dessus.

1. Soit $(k, l) \in \mathcal{I}$, démontrons que \mathcal{O}_{kl} est un ouvert dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$.

- L'ensemble \mathcal{O}_{kl} est ouvert :

Soit $f \in \mathcal{O}_{kl}$. Si $\mathcal{Q}_1(f, k, l)$ est vraie, le voisinage \mathcal{U} de f donné par cette proposition est inclus dans \mathcal{O}_{kl} .

Sinon c'est $\mathcal{Q}_2(f, k, l)$ qui est vraie. Soit p un point de C_{kl}^1 et m un entier donnés par la proposition $\mathcal{Q}_2(f, k, l)$ tels que $f^m(p)$ appartient à l'intérieur de C_{kl}^2 et $f^j(p)$ appartient à A_k pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$.

Considérons alors l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \text{Diff}_\omega^1(M) &\longrightarrow M^{m-1} \\ g &\longmapsto (g(p), \dots, g^m(p)) \end{aligned}$$

L'application ϕ est continue et $\phi(f) = (f(p), \dots, f^m(p))$ appartient à l'ouvert $B \times \dots \times B \times \text{int}(C_{kl}^2)$ où $\text{int}(C_{kl}^2)$ est l'intérieur de C_{kl}^2 . Il existe donc \mathcal{U} un voisinage de f tel que pour tout $g \in \mathcal{U}$, $\phi(g) = (g(p), \dots, g^m(p))$ appartient à cet ouvert.

De plus l'application $g \in \text{Diff}_\omega^1(M) \mapsto g^{-1} \in \text{Diff}_\omega^1(M)$ est continue et si K est un compact et U un ouvert de M , l'ensemble des applications pour lesquelles l'image de K est inclus dans U est un ouvert pour la topologie forte de Whitney. Il existe donc un voisinage \mathcal{U}' de f tel que si $g \in \mathcal{U}'$, les compacts $g(\overline{A_k})$ et $g^{-1}(\overline{A_k})$ sont inclus dans A_l .

La proposition $\mathcal{Q}_2(g, k, l)$ est donc vraie pour les éléments de $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$. Par conséquent, le voisinage $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ est donc inclus dans \mathcal{O}_{kl} .

Dans les deux cas, l'ensemble \mathcal{O}_{kl} est un voisinage de f . Il est donc bien un ouvert de $\text{Diff}_\omega^1(M)$.

REMARQUE 2.7. Le fait que la proposition $\mathcal{Q}_2(f, k, l)$ demande que ce soit l'image de l'adhérence de A_k qui soit contenue dans A_l et non A_k seulement n'est utile que pour garantir le fait que l'ensemble des applications qui vérifient $\mathcal{Q}_2(f, k, l)$ est ouvert et ce grâce au fait que, nous l'avons déjà dit, si K est un compact et U un ouvert de M , l'ensemble des applications pour lesquelles l'image de K est inclus dans U est un ouvert pour la topologie forte de Whitney.

- Densité de \mathcal{O}_{kl} :

Soit \mathcal{O} un ouvert de $\text{Diff}_\omega^1(M)$. S'il existe $f \in \mathcal{O}$ tel que $\mathcal{Q}_1(f, k, l)$ est vraie alors $f \in \mathcal{O}_{kl}$ et $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{kl} \neq \emptyset$. Sinon cherchons à l'aide du lemme 2.2 une application f dans \mathcal{O} tel que $\mathcal{Q}_2(f, k, l)$ est vraie.

Soit $g \in \mathcal{O}$ tel que $\mathcal{Q}_1(g, k, l)$ est fausse. Il existe donc $h \in \mathcal{O} \cap \mathcal{G}_\infty(M)$ et $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple invariante par h dont l'image est incluse dans A_k et qui est une courbe essentielle de A_k vérifiant les trois points ci-dessous :

- l'application h ne possède pas de point périodique sur toute courbe fermée simple qu'il laisse invariante et dont l'image est incluse dans A_k et qui est essentielle dans A_k ,
- l'ensemble $h(\overline{A_k})$ est inclus dans A_l ,
- l'ensemble $h^{-1}(\overline{A_k})$ est inclus dans A_l .

D'après le lemme 2.5, il existe une application f dans \mathcal{O} , un point p dans C_{kl}^1 et $m \in \mathbb{N}$ tels que $f^m(p)$ appartient à l'intérieur de C_{kl}^2 et $f^j(p)$ appartient à A_k pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$.

De plus si f est suffisamment proche de h , les ensembles $f(\overline{A_k})$ et $f^{-1}(\overline{A_k})$ sont inclus dans A_l .

Ce qui signifie que $\mathcal{Q}_2(f, k, l)$ est vraie. Par conséquent f appartient à \mathcal{O}_{kl} et $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{kl} \neq \emptyset$.

L'ouvert \mathcal{O}_{kl} est donc dense dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$.

2. Soit $f \in (\bigcap_{(k,l) \in \mathcal{I}} \mathcal{O}_{kl}) \cap \mathcal{G}_\infty(M)$. Supposons que f laisse invariante une courbe γ fermée simple.

Il suffit donc de démontrer que f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Par construction de la famille $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que γ est une courbe essentielle de A_l .

Les applications f et f^{-1} étant continues et $f(\gamma(\mathbb{T}^1)) = \gamma(\mathbb{T}^1) = f^{-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$, il existe U un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ inclus dans A_l tel que $f(U) \cup f^{-1}(U) \subseteq A_l$. Comme $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est compact, on peut de plus supposer que $\overline{U} \cup f(\overline{U}) \cup f^{-1}(\overline{U}) \subseteq A_l$.

Or il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k est un voisinage de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ inclus dans U et pour lequel γ est une courbe essentielle. Ainsi $A_k \prec A_l$ par conséquent $(k, l) \in \mathcal{I}$. De plus $f(\overline{A_k}) \cup f^{-1}(\overline{A_k}) \subseteq A_l$.

Or f appartient à $\mathcal{O}_{kl} \cap \mathcal{G}_\infty(M)$. Donc $\mathcal{Q}_1(f, k, l)$ ou $\mathcal{Q}_2(f, k, l)$ est vraie.

Si c'est $\mathcal{Q}_1(f, k, l)$ qui est vraie, l'application f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Sinon c'est $\mathcal{Q}_2(f, k, l)$ qui est vraie. Il existe alors un point p dans C_{kl}^1 et un entier m tels que $f^m(p)$ appartient à l'intérieur de C_{kl}^2 et $f^j(p)$ appartient à A_k pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$. D'après le lemme 2.6, l'application f possède dans ce cas aussi, des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

3 Etude des points périodiques hyperboliques sur une courbe fermée simple invariante

Dans le paragraphe précédent, nous avons démontré qu'un difféomorphisme symplectique C^1 -générique, s'il possède une courbe fermée simple invariante, admet obligatoirement un point périodique appartenant à l'image de cette courbe.

Soit donc f un tel difféomorphisme possédant une courbe fermée simple invariante. En supposant que f vérifie une autre propriété générique que nous préciserons, nous allons démontrer que les points périodiques de ce difféomorphisme appartenant à cette courbe, ne peuvent être tous hyperboliques.

PROPOSITION 3.1. — *Il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ noté $\mathcal{G}_h(M)$ tel que si $f \in \mathcal{G}_h(M)$ admet une courbe fermée simple invariante γ alors f possède un point périodique elliptique sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.*

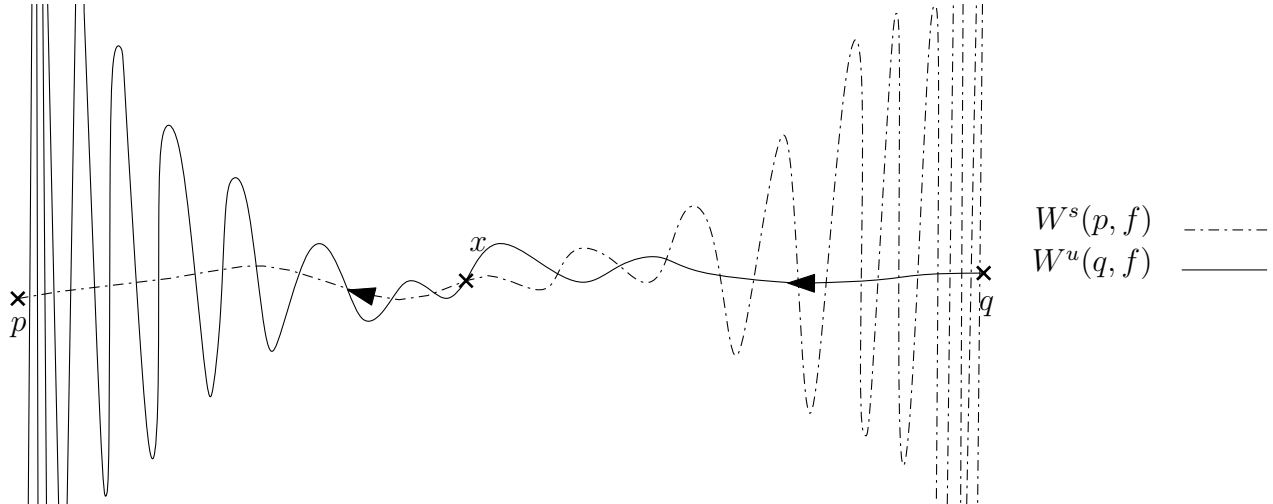
M. Herman dans [He83] a démontré qu'un difféomorphisme de l'anneau déviant la verticale C^1 -générique ne possède pas de points périodiques sur une courbe fermée simple, invariante par cette application. Nous allons ici nous inspirer de sa preuve. Dans son cas, il utilise le fait qu'une telle courbe est un graphe lipschitzien (théorie de Birkhoff) pour démontrer qu'un point périodique ne peut être elliptique. Cette idée ne peut évidemment être exploitée ici. En revanche, l'argument qu'il utilise pour supprimer les points hyperboliques est ici applicable. Le chapitre 3 nous permettra alors de supprimer les points périodiques elliptiques. Pour un exposé un peu plus détaillé de la démonstration d'Herman ainsi que pour la définition d'un difféomorphisme de l'anneau déviant la verticale, on peut bien sûr consulter [He83]. Nous renvoyons aussi à l'appendice de ce chapitre.

Voici la démarche que nous allons suivre : nous allons, dans un premier temps, vérifier qu'une variété stable et une variété instable de deux points périodiques, si elles sont transverses, ne peuvent contenir dans leur intersection un arc continu, puis nous vérifierons que cela ne peut se produire pour un difféomorphisme générique.

3.1 Variété stable et variété instable transverses

PROPOSITION 3.2. — Soit f un difféomorphisme symplectique de M , p et q deux points périodiques hyperboliques pour f .

Si $W^s(p, f)$ et $W^u(q, f)$ sont transverses alors l'intersection de $W^s(p, f)$ et $W^u(q, f)$ est un ensemble au plus dénombrable.



Démonstration. — Soit k et k' les périodes respectives de p et q . D'après le § 1.1, il existe U et V deux ouverts de M contenant respectivement p et q tels que :

$$W^s(p, f) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f^{-mk}(W_U^s(p, f)),$$

$$W^u(q, f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{nk'}(W_V^u(q, f)),$$

où $W_U^s(p, f)$ la variété stable locale de p dans U et $W_V^u(q, f)$ la variété instable locale de q dans V sont des sous-variétés de dimension 1 de la surface M .

Alors :

$$\begin{aligned} W^s(p, f) \cap W^u(q, f) &= \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} f^{-mk}(W_U^s(p, f)) \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{nk'}(W_V^u(q, f)) \right) \\ &= \bigcup_{(m, n) \in \mathbb{N}^2} f^{-mk}(W_U^s(p, f)) \cap f^{nk'}(W_V^u(q, f)). \end{aligned} \quad (\star)$$

Nous supposons que $W^s(p, f)$ et $W^u(q, f)$ sont transverses. Ce qui signifie que pour tout couple d'entiers (m, n) , $f^{-mk}(W_U^s(p, f))$ et $f^{nk'}(W_V^u(q, f))$ se rencontrent transversalement. Leur intersection est donc une sous-variété de codimension la somme des dimensions de $W_U^s(p, f)$ et $W_V^u(q, f)$. Or M est une variété de dimension 2.

Par conséquent $f^{-mk}(W_U^s(p, f)) \cap f^{nk'}(W_V^u(q, f))$ est une sous-variété de M de dimension 0. Cet ensemble est donc un sous ensemble de points isolés de M .

Or M est une surface qui, au sens où nous l'entendons, est une variété riemannienne. L'espace M est

donc un espace métrique séparable. Donc $f^{-mk}(W^s_U(p, f)) \cap f^{nk'}(W^u(q, f))$ est au plus dénombrable.

Ainsi d'après (\star) , l'intersection de $W^s(p, f)$ et $W^u(q, f)$ est une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. Ce qui implique que l'intersection de $W^s(p, f)$ et de $W^u(q, f)$ est au plus dénombrable. \square

3.2 Preuve de la proposition 3.1

Rappelons que nous avons construit dans le paragraphe précédent un G_δ dense noté $\mathcal{G}_p(M)$ tel que si f appartient à ce G_δ dense et possède une courbe fermée simple invariante γ alors f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Voici un lemme qui s'appuie sur le résultat précédent et qui étudie le cas où un difféomorphisme possède non seulement des points périodiques sur une courbe fermée simple invariante mais où l'on suppose aussi que ces points périodiques sont tous hyperboliques.

LEMME 3.3. — *Soit f un difféomorphisme symplectique laissant invariante une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ fermée simple. Si f admet sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ des points périodiques qui sont tous hyperboliques alors certaines des variétés stables ou instables de ces points périodiques se rencontrent et leur intersection n'est pas transverse.*

Terminons d'abord la démonstration de la proposition 3.1 avant de donner une preuve de ce lemme.

Soit donc $f \in \mathcal{G}_t(M) \cap \mathcal{G}_p(M)$ possédant une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ invariante. Comme $f \in \mathcal{G}_p(M)$, f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ (cf. proposition 2.1). Si ces points sont tous hyperboliques, d'après le lemme ci-dessus certaines des variétés stables ou instables de ces points périodiques se rencontrent et leur intersection n'est pas transverse, ce qui contredit le fait que $f \in \mathcal{G}_t(M)$. Les points périodiques de f appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$ ne sont donc pas tous hyperboliques...ce qui implique que certains soient elliptiques.

Il suffit donc de considérer le G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ défini par :

$$\mathcal{G}_h(M) = \mathcal{G}_t(M) \cap \mathcal{G}_p(M).$$

Preuve du lemme 3.3. — Supposons tout d'abord que f préserve l'orientation de la courbe γ .

D'après la proposition 2.33 du chapitre 1, les points périodiques de f appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$ ont tous la même période. Notons k cette période commune.

Comme les points périodiques de f appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$ sont hyperboliques, ils sont non dégénérés. Or d'après la proposition 1.7, un point périodique non dégénéré de période donnée est isolé parmi les points périodiques de même période. L'ensemble $\gamma(\mathbb{T}^1)$ étant compact, l'ensemble des points périodiques de f sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est donc fini.

Soit $(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ une famille de points du cercle tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\theta_{i-1} < \theta_i < \theta_{i+1}$ et tels que les $x_i = \gamma(\theta_i)$, $i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, sont les points périodiques de f appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

L'application $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$ est une application du cercle préservant l'orientation. D'après la proposition 1.5 du chapitre 1, il y a deux cas :

$$\forall \theta \in]\theta_1; \theta_2[, \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{nk}(\theta) = \theta_1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{-nk}(\theta) = \theta_2,$$

ou

$$\forall \theta \in]\theta_1; \theta_2[, \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{nk}(\theta) = \theta_2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{-nk}(\theta) = \theta_1.$$

En utilisant la continuité de γ , on en déduit que

$$\forall z \in \gamma(] \theta_1; \theta_2 [), \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{nk}(z) = x_1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{-nk}(z) = x_2, \quad (1)$$

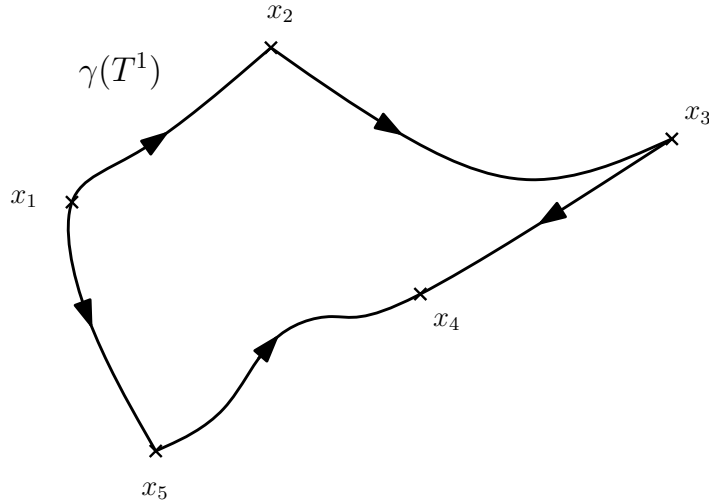
ou

$$\forall z \in \gamma(] \theta_1; \theta_2 [), \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{nk}(z) = x_2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{-nk}(z) = x_1. \quad (2)$$

Ainsi $\gamma(] \theta_1; \theta_2 [)$ est inclus dans l'intersection de $W^s(x_1, f)$ et de $W^u(x_2, f)$ si l'on est dans le cas (1) et dans l'intersection de $W^u(x_1, f)$ et de $W^s(x_2, f)$ si l'on est dans le cas (2).

Or $\gamma(] \theta_1; \theta_2 [)$ n'est pas dénombrable. D'après la proposition 3.2, $W^s(x_1, f)$ et $W^u(x_2, f)$ (ou $W^u(x_1, f)$ et $W^s(x_2, f)$) ne se rencontrent pas transversalement.

Voici un schéma représentant l'image d'une courbe γ fermée simple invariante par un difféomorphisme f qui préserve son orientation et sur laquelle f possède des points périodiques x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 .



$$\text{Ainsi } \gamma(\mathbb{T}^1) \subseteq W^s(x_1, f) \cup W^u(x_2, f) \cup W^s(x_3, f) \cup W^u(x_4, f) \cup W^s(x_5, f).$$

Reste à traiter le cas où f ne préserve pas l'orientation de la courbe γ .

Dans ce cas, on considère l'application f^2 qui, elle, préserve l'orientation de la courbe γ . Les points périodiques de f appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$ sont aussi les points périodiques de f^2 sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ pour laquelle ils sont aussi hyperboliques (cf. proposition 1.5).

D'après ce qui précède, certaines des variétés stables ou instables relativement à f^2 de ces points périodiques se rencontrent et leur intersection n'est pas transverse. Or d'après la remarque 1.11, les variétés stables et instables relativement à f et f^2 coïncident. D'où le résultat. ■

Appendice : l'argument d'Herman

Posons $A = \mathbb{T}^1 \times [0; 1]$ muni de la forme symplectique $\omega = d\theta \wedge dr$.

M.Herman s'intéresse dans [He83] aux courbes fermées simples invariantes par un difféomorphisme symplectique de A déviant la verticale homotope à l'identité.

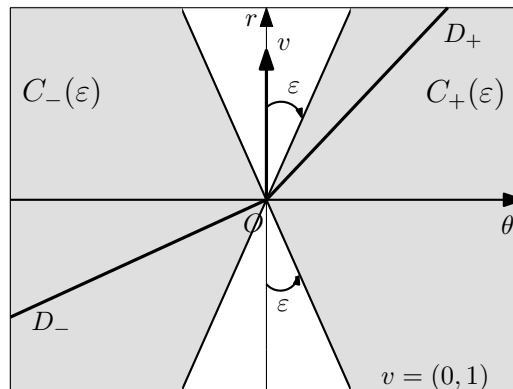
Pour tous les points techniques, nous renvoyons au mémoire d'Herman. Nous allons seulement tenter d'expliquer la démarche globale d'Herman. Rappelons seulement ce qu'est un difféomorphisme déviant la verticale.

On munit l'espace tangent de A de sa trivialisatation canonique.

Soit f un difféomorphisme de A , l'application tangente Df de f au point x est donc une application $Df(x) : \{x\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \{f(x)\} \times \mathbb{R}^2$.

Pour $0 < \varepsilon < \pi/2$, $C_+(\varepsilon)$ est l'ensemble des points x tels que l'angle entre les vecteurs \vec{Ox} et $v = (1, 0)$ soit compris entre $\pi/2 - \varepsilon$ et $-\pi/2 + \varepsilon$.

On note $C_-(\varepsilon) = -C_+(\varepsilon)$.



Les demi droites D_+ et D_- appartiennent respectivement à $C_+(\varepsilon)$ et à $C_-(\varepsilon)$

Soit f un difféomorphisme de A homotope à l'identité. On dit que f dévie la **verticale à gauche** [respectivement **à droite**] s'il existe $0 < \varepsilon < \pi/2$ tel que pour tout $x \in A$, on ait :

$$Df(x)(0, 1) \in C_-(\varepsilon) \text{ [respectivement] } C_+(\varepsilon),$$

$$Df^{-1}(x)(0, 1) \in C_+(\varepsilon) \text{ [respectivement] } C_-(\varepsilon).$$

On munit $\text{Diff}_\omega^1(A)$ de la C^1 topologie uniforme. Pour cette topologie l'ensemble des difféomorphismes qui dévient la verticale est un ouvert.

Remarquons qu'un difféomorphisme déviant la verticale est homotope à l'identité. Il préserve donc l'orientation de toutes les courbes fermées simples qu'il laisse invariantes.

Voici le résultat démontré par M.Herman dans ce mémoire :

PROPOSITION 3.4. — *Il existe un G_δ dense G de $\{f \in \text{Diff}_\omega^1(A) \mid f \text{ dévie la verticale}\}$ muni de la C^1 topologie induite tels que si $f \in G$, il n'existe pas de courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow A$ fermée simple essentielle invariante par f telle que $\gamma(\mathbb{T}^1)$ ne rencontre pas $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ et $\mathbb{T}^1 \times \{1\}$ et telle que f possède des points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.*

Pour démontrer cette proposition, on utilise tout d'abord deux résultats de Birkhoff qui permettent de démontrer que si un difféomorphisme déviant la verticale admet une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow A$ fermée simple essentielle invariante alors $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est le graphe d'une application lipschitzienne du cercle.

Puis on se place dans un G_δ dense de $\{f \in \text{Diff}_\omega^1(A) \mid f \text{ dévie la verticale}\}$ dont les éléments vérifient les deux propriétés suivantes :

- a) tout point périodique est non dégénéré,
- b) tout point périodique hyperbolique $x \in \mathbb{T}^1 \times]0; 1[$ est tel que les variétés stable et instable s'intersectent transversalement.

Ensuite on prend une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow A$ fermée, simple, essentielle et invariante par un difféomorphisme f déviant la verticale. On suppose que f possède un point périodique sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

En utilisant le fait que $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est le graphe d'une application lipschitzienne, M. Herman démontre que les points périodiques de f sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ sont hyperboliques. Voici comment il procède.

Considérons un réel K strictement positif, ainsi qu'une application $\phi : \mathbb{T}^1 \rightarrow]0; 1[$, lipschitzienne de rapport K , tels que :

$$\gamma(\mathbb{T}^1) = \{(\theta, \phi(\theta)) : \theta \in \mathbb{T}^1\}.$$

Soit $x = \gamma(\theta)$ un point périodique de f appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$. Définissons le cône tangent de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ en x . Pour cela considérons l'ensemble \mathcal{S} des suites $(\theta_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{T}^1 \times]0; +\infty[$ telles que :

- quelque soit l'entier naturel n , $\theta_n \neq \theta$,
- la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers θ dans \mathbb{T}^1 ,
- la suite $\left(\frac{\gamma(\theta_n) - x}{t_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur de \mathbb{R}^2 .

Posons alors :

$$C_x \gamma = \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(\theta_n) - x}{t_n} : (\theta_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S} \right\}.$$

Cet ensemble, $C_x \gamma$, est un cône de \mathbb{R}^2 (c'est-à-dire que c'est un sous ensemble de \mathbb{R}^2 stable par produit par un nombre strictement positif). Il n'est pas réduit au vecteur nul. Pour vérifier cela, il suffit de prendre une suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du cercle qui converge vers θ et telle que quelque soit l'entier naturel n , θ_n est différent de θ , puis de poser $t_n = \|\gamma(\theta_n) - x\|$. La suite $\left(\frac{\gamma(\theta_n) - x}{t_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite du cercle unité qui, quitte à en extraire une sous suite, converge vers un vecteur non nul car appartenant au cercle unité. On dit que $C_x \gamma$ est le cône tangent de γ en x . Voici deux lemmes qui concernent ce cône tangent.

LEMME 3.5. — L'entier m étant la période de x sous f , $C_x\gamma$ est stable par $Df^m(x)$.

Preuve . — Soit $u \in C_x\gamma$. Il existe $(\theta_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite appartenant à \mathcal{S} telle que :

$$u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(\theta_n) - x}{t_n}.$$

L'ensemble $\gamma(\mathbb{T}^1)$ étant invariant par f et donc par f^m , il existe $(\theta'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite du cercle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^m(\gamma(\theta_n)) = \gamma(\theta'_n)$. Le point x étant un point fixe de f^m , la suite $(\gamma(\theta'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x . Or l'application γ est continue et injective, la suite $(\theta'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers θ . De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(\theta'_n) - x}{t_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^m(\gamma(\theta_n)) - f^m(x)}{t_n} = Df^m(x)u.$$

Ce qui démontre que le vecteur $Df^m(x)u$ appartient au cône tangent de γ en x . ■

LEMME 3.6. — L'ensemble $C_x\gamma$ est inclus dans l'ensemble $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0 \text{ et } \left| \frac{b}{a} \right| \leq K\} \cup \{0\}$ qui est un cône de \mathbb{R}^2 .

Preuve . — Soit $u = (u_1, u_2)$ un vecteur appartenant à $C_x\gamma$. Il existe $(\theta_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite appartenant à \mathcal{S} telle que :

$$u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\theta_n - \theta}{t_n}, \frac{\phi(\theta_n) - \phi(\theta)}{t_n} \right).$$

L'application ϕ étant lipschitzienne de rapport K ,

$$|\phi(\theta_n) - \phi(\theta)| \leq Kd(\theta_n, \theta).$$

Ainsi si $u_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta_n - \theta}{t_n}$ est égal à 0, u_2 est aussi égal à 0 et u est le vecteur nul. En revanche, si u_1 est non nul, on obtient que :

$$\left| \frac{u_2}{u_1} \right| \leq K.$$

■

Or ces deux lemmes ne peuvent être vérifiés si x est un point périodique elliptique de f . En effet nous avons supposé que tous les points périodiques de f sont non dégénérés, autrement dit que les valeurs propres de $Df^m(x)$, m étant la période de x , ne sont pas des racines de l'unité. Par conséquent, si x est elliptique, les itérés d'une demi-droite quelconque du plan par $Df^m(x)$ forment un ensemble dense de \mathbb{R}^2 . Ils ne peuvent donc être inclus, contrairement à ce que démontre les deux lemmes précédents, dans un cône de \mathbb{R}^2 , distinct de \mathbb{R}^2 , et qui n'est donc pas un ensemble dense. Les points périodiques de f appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$ ne pouvant être elliptiques, sont hyperboliques.

On démontre alors que l'ensemble $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est une réunion de variétés stables et instables de points périodiques hyperboliques ce qui est impossible en ayant supposé que f vérifie la propriété b). C'est cette idée qui est largement utilisée et développée au paragraphe 3 de ce chapitre.

Chapitre III

Etude des points périodiques elliptiques sur une courbe fermée simple invariante

Rappelons que notre but est de construire un G_δ dense de de difféomorphismes symplectiques dont les éléments n'admettent aucune courbe fermée simple invariante.

Nous avons démontré dans le chapitre 2, qu'il existe un G_δ dense de difféomorphismes symplectiques dont les éléments, s'ils admettent une courbe fermée simple invariante, possèdent au moins un point périodique elliptique sur l'image de cette courbe.

Dans ce chapitre, nous allons construire un G_δ dense de difféomorphismes symplectiques dont les éléments, s'ils laissent une courbe fermée simple invariante ne possèdent pas de points périodiques elliptiques sur l'image de cette courbe.

Il suffira donc de considérer l'intersection de ces deux G_δ denses pour conclure.

Voici la démarche que nous allons adopter.

Tout d'abord, nous allons démontrer que si un difféomorphisme vérifie avec l'un de ses points périodiques une certaine propriété, la propriété Γ , aucune courbe fermée simple invariante par f n'a son image qui contient ce point.

Puis nous construirons un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ dont les éléments vérifient cette propriété avec tous ses points périodiques elliptiques.

Les éléments de ce G_δ dense ne possèdent alors aucun point périodique elliptique sur les images des courbes fermées simples qu'ils laissent invariantes.

La construction de ce G_δ dense repose sur deux propositions assez techniques que nous démontrons dans le troisième paragraphe. Leur preuve repose, d'une part sur la proposition 4.1 démontrée dans le chapitre 4 et qui permet d'entourer un point périodique elliptique par une courbe fermée simple de classe C^1 sur l'image de laquelle se trouve un nombre fini de points périodiques tous hyperboliques, d'autre part sur la proposition 2.6, démontrée lui aussi dans le chapitre 4, et qui permet de perturber un difféomorphisme symplectique au voisinage d'un point de façon à modifier sa différentielle en ce point.

En tout cas ce chapitre repose largement, même si ce n'est pas visible, sur le formalisme des fonctions génératrices décrit au quatrième chapitre.

1 Courbe fermée simple sur une surface

Soit (M, d) une surface riemannienne. Soit $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple. Dans le cas où M est la sphère ou le plan, le théorème de Jordan nous renseigne sur les caractéristiques topologiques des composantes connexes de $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$. Qu'advient t'il dans le cas d'une surface quelconque ? Nous allons travailler ici dans le cas où $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est inclus dans un ouvert de M homéomorphe à \mathbb{R}^2 et tenter de caractériser l'une des composantes connexes du complémentaire de $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

PROPOSITION ET DÉFINITION 1.1. — *Soit (M, d) une surface riemannienne. Soit U un ouvert de M homéomorphe au plan et $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple dont l'image est incluse dans U , alors $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède exactement une composante connexe, notée $\text{int}_U(\gamma)$, qui*

est relativement compacte et incluse dans U . De plus la frontière de $\text{int}_U(\gamma)$ est $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Démonstration. — Considérons un homéomorphisme $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Unicité. Supposons que $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ possède une composante connexe, notée C , relativement compacte et incluse dans U . Étudions $h(C)$ qui est une partie de \mathbb{R}^2 .

- Tout d'abord, notons que $h(C)$ est un ouvert connexe du plan inclus dans $\mathbb{R}^2 \setminus h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$.
- De plus la frontière de C est incluse dans $\gamma(\mathbb{T}^1)$, donc dans U . Ainsi la frontière de $h(C)$ est contenue dans $h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$. D'après le sous lemme 3.12 démontré au chapitre 1, on en déduit que $h(C)$ est une composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$.
- Enfin C est relativement compacte et son adhérence est incluse dans U . Par conséquent, $h(C)$ est relativement compacte dans \mathbb{R}^2 . C'est donc la composante connexe bornée de $M \setminus h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$. Ainsi :

$$h(C) = \text{int}(h \circ \gamma).$$

D'où l'unicité d'une éventuelle composante connexe relativement compacte de $X \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ incluse dans U .

Existence. Il reste à vérifier que l'ensemble $C = h^{-1}(\text{int}(h \circ \gamma))$ convient.

- Tout d'abord, notons que C est un ouvert connexe de $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$.
- L'ensemble $\text{int}(h \circ \gamma)$ est relativement compacte dans \mathbb{R}^2 . Donc C est relativement compacte dans U . Ainsi l'adhérence de C dans U est compacte et coïncide donc avec son adhérence dans M . De plus, la frontière de $\text{int}(h \circ \gamma)$ est $h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$. La frontière de C dans U et donc dans M , est $\gamma(\mathbb{T}^1)$. Par conséquent, C est un ouvert connexe de M inclus dans $X \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ dont la frontière est $\gamma(\mathbb{T}^1)$. D'après le sous lemme 3.12 du chapitre 1 déjà utilisé, il est une composante connexe de $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$. Or C est inclus dans U . C'est donc la composante connexe cherchée. \square

REMARQUE 1.2. Soit $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe et U un ouvert de X vérifiant les hypothèses de la proposition ci-dessus. Si $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme, alors $h(\text{int}_U(\gamma)) = \text{int}(h \circ \gamma)$.

L'ensemble des applications continues du cercle à valeurs dans M est noté $C^0(\mathbb{T}^1, M)$. Soit γ et δ deux éléments de $C^0(\mathbb{T}^1, M)$, on note $d(\delta, \gamma) = \max_{t \in \mathbb{T}^1} d(\gamma(t), \delta(t))$. L'application d est une distance sur $C^0(\mathbb{T}^1, M)$ qui induit la topologie de la convergence uniforme.

PROPOSITION 1.3. — Soit (M, d) une surface riemannienne.

Soit U un ouvert de M homéomorphe au plan et $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple dont l'image est incluse dans U . Soit x_0 un point de $\text{int}_U(\gamma)$.

Il existe un réel ε strictement positif tel que pour toute courbe $\delta : \mathbb{T}^1 \rightarrow U$ et tout point x appartenant à U , si $d(\gamma, \delta) < \varepsilon$ et si $d(x, x_0) < \varepsilon$ alors x appartient à $\text{int}_U(\delta)$.

Démonstration. — Considérons $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme tel que $h(x_0) = 0$.

Nous renvoyons au premier chapitre pour la définition de l'indice d'une courbe par rapport à un point, ainsi que pour les propriétés s'y rattachant.

D'après la remarque 1.2, on sait que si δ est une courbe fermée simple dont l'image est incluse dans U alors $\text{int}_U(\delta) = h^{-1}(\text{int}(h \circ \delta))$. Par conséquent :

$$x \in \text{int}_U(\delta) \Leftrightarrow h(x) \in \text{int}(h \circ \delta) \Leftrightarrow \text{ind}(h(x), h \circ \delta) \neq 0. \quad (\star)$$

Remarquons que le point x_0 appartient à $\text{int}_U(\gamma)$, ainsi l'indice de $h \circ \gamma$ relativement à 0 est non nul.

SOUS LEMME 1.4. — Il existe $\mu > 0$ tel que si $\hat{\delta} \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}^2)$ et $u \in \mathbb{R}^2$ vérifient $d(\hat{\delta}, h \circ \gamma) < \mu$ et $\|u\| < \mu$ alors $u \in \text{int}(\hat{\delta})$.

Preuve . — Soit μ le réel défini par :

$$\mu = \min_{t \in \mathbb{T}^1} \frac{\|h \circ \gamma(t)\|}{2}.$$

C'est un réel strictement positif car 0 n'appartient pas à l'image de $h \circ \gamma$. Soit $\hat{\delta} \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R}^2)$ et $u \in \mathbb{R}^2$ tels que $d(\hat{\delta}, h \circ \gamma) < \mu$ et $\|u\| < \mu$. Définissons l'application :

$$\begin{aligned} F : [0; 1] \times \mathbb{T}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\longmapsto s \hat{\delta}(t) + (1 - s)h \circ \gamma(t) \end{aligned}$$

Cette application F est à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{u\}$ car pour tout $(s, t) \in [0; 1] \times \mathbb{T}^1$:

$$\begin{aligned} \|F(s, t) - u\| &= \left\| s \hat{\delta}(t) + (1 - s)h \circ \gamma(t) - u \right\| \\ &= \left\| h \circ \gamma(t) - u - s(h \circ \gamma(t) - \hat{\delta}(t)) \right\| \\ &\geq \|h \circ \gamma(t)\| - s \|h \circ \gamma(t) - \hat{\delta}(t)\| - \|u\| \\ &> 2\mu - s\mu - \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Or quelque soit $t \in \mathbb{T}^1$, $F(0, t) = h \circ \gamma(t)$ et $F(1, t) = \hat{\delta}(t)$. Ainsi F est une homotopie entre $\hat{\delta}$ et $h \circ \gamma$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{u\}$. Ce qui d'après les propriétés de l'indice démontre que :

$$\text{ind}(u, \hat{\delta}) = \text{ind}(u, h \circ \gamma).$$

Or la boule de centre 0 de rayon μ , $B(0, \mu)$, ne rencontre pas $h \circ \gamma(\mathbb{T}^1)$ et 0 appartient à $\text{int}(h \circ \gamma)$. Par conséquent $B(0, \mu)$ est incluse dans $\text{int}(h \circ \gamma)$. Mais le point u appartient à cette boule. Il appartient donc à l'intérieur de $h \circ \gamma$. Ainsi $\text{ind}(u, h \circ \gamma) \neq 0$. Ce qui implique que $\text{ind}(u, \hat{\delta}) \neq 0$. ■

Or par continuité de l'application h , on a l'existence d'un réel ε strictement positif tel que :

- si un courbe fermée simple $\delta : \mathbb{T}^1 \rightarrow U$ vérifie $d(\delta, \gamma) < \varepsilon$ alors $d(h \circ \delta, h \circ \gamma) < \mu$,
- si $x \in U$ vérifie $d(x, x_0) < \varepsilon$ alors $\|h(x)\| < \mu$.

Dans ce cas, $\text{ind}(h(x), h \circ \delta) = 0$. Ce qui implique que x appartient à $\text{int}_U(\delta)$. □

2 Propriété Γ

2.1 Définition de la propriété Γ

DÉFINITION 2.1. — Soit M une surface. Soit a, b et c trois points du cercle \mathbb{T}^1 tels que b appartient à $]a; c[$. Soit $\gamma_1 : [a; b] \rightarrow M$ et $\gamma_2 : [b; c] \rightarrow M$ deux arcs continus tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. La

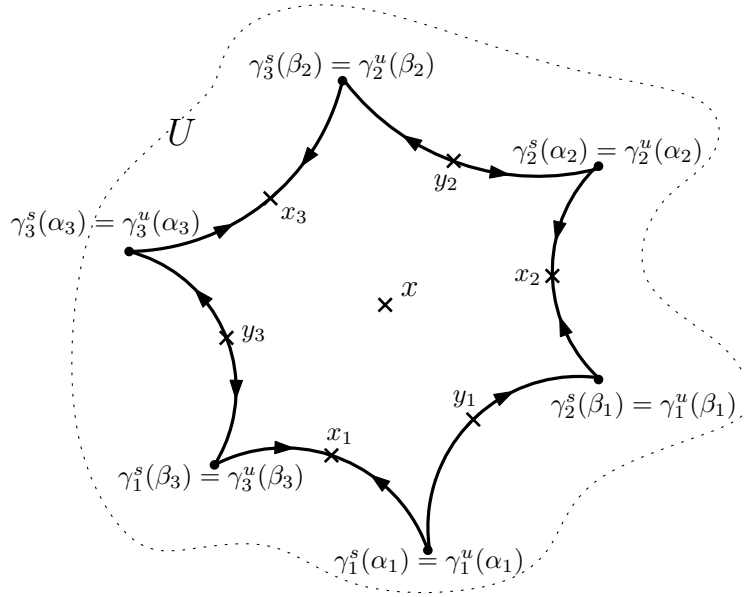
concaténation de γ_1 et γ_2 , notée $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ est l'arc continu défini sur $[a; c]$ par :

$$\begin{aligned} \gamma_1 \wedge \gamma_2 : [a; c] &\longrightarrow M \\ \theta &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(\theta) & \text{si } \theta \in [a; b] \\ \gamma_2(\theta) & \text{si } \theta \in [b; c]. \end{cases} \end{aligned}$$

DÉFINITION 2.2. — Soit $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$, $m \in \mathbb{N}^*$, x un point périodique elliptique de f et U un voisinage de x .

On dit que f et x vérifient **la propriété Γ relativement à U** s'il existe une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow U$ fermée simple et $2n$ points $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ appartenant à M tels que :

1. x appartient à une composante connexe de $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ incluse dans U .
2. $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des points m -périodiques hyperboliques pour f .
3. $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est la concaténation d'arcs C^1 , $\gamma_i^s : [\beta_{i-1}; \alpha_i] \rightarrow M$ et $\gamma_i^u : [\alpha_i; \beta_i] \rightarrow M$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tels que :
 - Les points x_i et y_i appartiennent respectivement à $\gamma_i^s([\beta_{i-1}; \alpha_i])$ et à $\gamma_i^u([\alpha_i; \beta_i])$,
 - les images des arcs γ_i^s et γ_i^u sont respectivement incluses dans $W^s(x_i, f)$ et $W^u(y_i, f)$.
4. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les vecteurs $(\gamma_i^s)'(\alpha_i)$ et $(\gamma_i^u)'(\alpha_i)$ d'une part et les vecteurs $(\gamma_i^u)'(\beta_i)$ et $(\gamma_{i+1}^s)'(\beta_i)$ d'autre part sont non colinéaires (et donc non nuls).
5. De plus, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\gamma_i^s([\beta_{i-1}; \alpha_i])$ et $\gamma_i^u([\alpha_i; \beta_i])$ sont respectivement stables par f^{2m} et f^{-2m} .



On dit que f et x vérifient **la propriété Γ** si quelque soit U voisinage de x , f et x vérifient la propriété Γ relativement à U .

REMARQUE 2.3. — Si le voisinage U de x est homéomorphe à \mathbb{R}^2 et relativement compacte, la première assertion devient : " $x \in \text{int}_U(\gamma)$ ".

REMARQUE 2.4. — Soit f un difféomorphisme symplectique, $k \in \mathbb{N}^*$ et x un point périodique elliptique de période k non dégénéré de f . Soit U un voisinage de x et n un entier strictement positif. Si f et x vérifient la propriété Γ relativement à U alors f^n et x vérifient aussi la propriété Γ relativement à U .

REMARQUE 2.5. — Soit f un difféomorphisme symplectique, x un point fixe elliptique non dégénéré de f et U un voisinage de x tels que f et x vérifient la propriété Γ relativement à U . Soit n un entier strictement positif et g un difféomorphisme symplectique. Si g^n coïncide avec f sur U alors x est un point périodique elliptique non dégénéré de g^n et g^n et x vérifient aussi la propriété Γ relativement à U .

2.2 Propriété Γ et courbes invariantes

PROPOSITION 2.6. — Soit f un difféomorphisme symplectique de M , $k \in \mathbb{N}^*$ et x un point périodique elliptique de période k non dégénéré de f .

Si f et x vérifient la propriété Γ , l'image d'aucune courbe fermée simple invariante par f ne contient x .

Démonstration. — Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons donc qu'il existe $\delta : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple invariante par f telle que x appartient à $\delta(\mathbb{T}^1)$.

Quitte à raisonner avec l'application f^2 , nous pouvons supposer que f préserve l'orientation de γ . En effet le point x est aussi un point périodique elliptique non dégénéré de f^2 avec lequel, d'après la remarque 2.4, il vérifie aussi la propriété Γ . De plus f^2 laisse invariante la courbe δ . Toutes les hypothèses vérifiées par f relativement à x et δ sont donc aussi vérifiées par f^2 qui en outre préserve dans tous les cas l'orientation de δ .

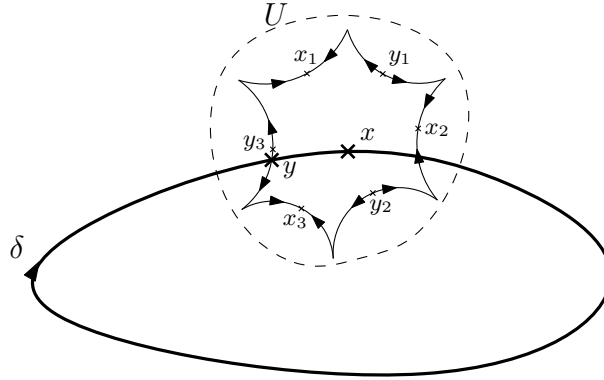
L'application f préserve donc l'orientation de la courbe δ . D'après la proposition 2.33 du premier chapitre, tous les points périodiques de f appartenant à $\delta(\mathbb{T}^1)$ ont la même période en l'occurrence k la période de x . C'est cela que nous allons contredire en utilisant que f et x vérifient la propriété Γ .

Le point x étant un point périodique non dégénéré de f , il est isolé parmi les points périodiques de f de période plus petite ou égale à k (cf. proposition 1.7 du chapitre 2). Il existe donc U un voisinage de x dans lequel f ne possède pas de point périodique de période plus petite ou égale à k autre que le point x . Quitte à réduire ce voisinage, on peut en outre supposer que $\delta(\mathbb{T}^1)$ n'est pas inclus dans ce voisinage.

Comme f et x vérifient la propriété Γ , ils la vérifient relativement à U . Il existe donc une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow U$ fermée simple et $2n$ points $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ appartenant à M tels que :

1. x appartient à une composante connexe de $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ incluse dans U ,
2. $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des points périodiques hyperboliques pour f ,
3. $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est la concaténation d'arcs C^1 , $\gamma_i^s : [\beta_{i-1}; \alpha_i] \rightarrow M$ et $\gamma_i^u : [\alpha_i; \beta_i] \rightarrow M$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tels que :
 - Les points x_i et y_i appartiennent respectivement à $\gamma_i^s([\beta_{i-1}; \alpha_i])$ et à $\gamma_i^u([\alpha_i; \beta_i])$,

– les images des arcs γ_i^s et γ_i^u sont respectivement incluses dans $W^s(x_i, f)$ et $W^u(y_i, f)$.
(Les assertions 4 et 5 de la propriété Γ sont inutiles pour démontrer cette proposition.)



LEMME 2.7. — *l'intersection de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ et de $\delta(\mathbb{T}^1)$ est non vide.*

Preuve . — Soit C la composante connexe de $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ qui contient x . Comme x appartient à $\delta(\mathbb{T}^1)$,

$$x \in \delta(\mathbb{T}^1) \cap C \neq \emptyset.$$

D'après l'assertion 1 de la propriété Γ , l'ensemble C est inclus dans U . Or $\delta(\mathbb{T}^1)$ n'est pas inclus dans U . Par conséquent :

$$\delta(\mathbb{T}^1) \cap (M \setminus C) \neq \emptyset.$$

Or l'ensemble $\delta(\mathbb{T}^1)$ est connexe. Il rencontre donc la frontière de C . Or C est une composante connexe de l'ouvert $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$. Sa frontière est donc incluse dans $\gamma(\mathbb{T}^1)$. D'où le fait que $\delta(\mathbb{T}^1)$ et $\gamma(\mathbb{T}^1)$ se rencontrent. ■

Soit donc $y \in \gamma(\mathbb{T}^1) \cap \delta(\mathbb{T}^1)$.

Par construction de la courbe γ , il existe $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que y appartient à $\gamma_i^s([\beta_{i-1}; \alpha_i])$ ou à $\gamma_i^u([\alpha_i; \beta_i])$, ce qui implique que y appartient à la variété stable de x_i ou à la variété instable de y_i . Supposons que le point y appartient à la variété stable de x_i , le cas où il appartiendrait à la variété instable de y_i se traitant de la même façon.

Soit l la période de x_i , la suite $(f^{nl}(y))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_i . Or l'image de δ est invariante par f et contient y . Par conséquent la suite $(f^{nl}(y))_{n \in \mathbb{N}}$ est incluse dans $\delta(\mathbb{T}^1)$. L'ensemble $\delta(\mathbb{T}^1)$ étant fermé, il contient donc le point x_i qui est la limite de la suite $(f^{nl}(y))_{n \in \mathbb{N}}$.

Mais les points x_i et x sont distincts car x_i appartient à $\gamma(\mathbb{T}^1)$ ce qui n'est pas le cas de x . Et x_i appartient à U car l'image de γ est incluse dans U . Comme x_i est le seul point périodique de f appartenant à U de période plus petite ou égale à k , on en déduit que la période de x_i est strictement plus grande que k .

Le point x_i est donc un point périodique de f de période strictement plus grande que k appartenant à $\delta(\mathbb{T}^1)$. D'où la contradiction. □

REMARQUE 2.8. Dans cette preuve, comme nous l'avons déjà souligné, les point 4 et 5 de la propriété Γ n'ont aucune utilité. Ils interviennent seulement dans les paragraphes suivants pour la construction d'un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ dont les éléments vérifient la propriété Γ avec leur point périodique elliptique. Ils sont la garantie de la stabilité de la propriété Γ par perturbation.

3 Propriété Γ et perturbations de difféomorphismes symplectiques

3.1 Premier résultat de perturbation à propos de la propriété Γ

Etant donné un difféomorphisme symplectique f et un point x périodique elliptique non dégénéré de f , la proposition suivante permet de perturber f pour obtenir un difféomorphisme qui vérifie avec le point x la propriété Γ . Cette proposition s'appuie largement sur le chapitre 4 dont le dernier résultat constitue le point de départ.

PROPOSITION 3.1. — *Soit f un difféomorphisme symplectique de M , $k \in \mathbb{N}^*$ et x un point périodique elliptique non dégénéré de période k pour f .*

Soit U un voisinage de x et \mathcal{U} un voisinage de f . Il existe $g \in \mathcal{U}$ tel que :

- *le point x est un point périodique elliptique non dégénéré de g de période k ,*
- *la propriété Γ est vérifiée par g et x relativement à U ,*
- *l'application g coïncide avec f hors de U .*

Démonstration. — Tout d'abord ramenons nous au cas où x est un point fixe. Pour cela, nous allons travailler avec l'application f^k pour lequel le point x est fixe. En perturbant f^k , nous allons trouver un difféomorphisme symplectique h tel que :

- *le point x est un point fixe elliptique non dégénéré de h ,*
- *la propriété Γ est vérifiée par h et x relativement à U ,*
- *l'application h coïncide avec f^k hors de U .*

Considérons alors l'application $g = f^{1-k} \circ h$ et vérifions que cette application g convient.

Tout d'abord, remarquons que l'application $\psi \in \text{Diff}_\omega^1(M) \mapsto f^{1-k} \circ \psi$ est continue et envoie f^k sur f . Ainsi, à condition d'avoir construit h dans un voisinage suffisamment petit de f^k , l'application g appartient à \mathcal{U} .

Ensuite l'application g^k coïncide avec h sur U . Pour cela, il faut avoir supposé, quitte à réduire U , que $U, \dots, f^{k-1}(U)$ sont deux à deux disjoints. En effet soit y un point de U , $g(y)$ appartient à $f(U)$. Or U et $f(U)$ sont disjoints et h coïncide avec f^k de U donc :

$$g^2(y) = f^k(h(y)) = f^k(f^{1-k} \circ h(y)) = f(h(y)).$$

Ce qui permet de démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \{1, \dots, k\}$, $g^n(y) = f^{n-1}(h(y))$ et $g^n(y)$ appartient à $f^n(U)$. Par conséquent :

$$g^k(y) = f^{k-1}(h(y)) = f^{k-1} \circ f^{1-k} \circ h(y) = h(y).$$

On a donc démontré d'une part que g^k coïncide avec h sur U , d'autre part que pour tout $n \in \{0, \dots, k\}$, $g^n(U)$ est inclus dans $f^n(U)$. D'après la remarque 2.5, on en déduit alors que x est un point périodique elliptique non dégénéré de g avec lequel g vérifie la propriété Γ relativement à U .

De plus $U, \dots, f^{k-1}(U)$ étant disjoints et contenant respectivement $U, \dots, g^{k-1}(U)$, le point x est un point périodique de période k de g .

Enfin, g coïncide avec f hors de U . En effet si y n'appartient pas à U , $h(y) = f^k(y)$ car h coïncide avec f^k hors de U . Par conséquent :

$$g(y) = f^{1-k} \circ h(y) = f^{1-k}(f^k(y)) = f(y).$$

Nous nous sommes donc ramener, quitte à travailler avec f^k , à supposer que x est un point fixe elliptique de f .

A nouveau, quitte à réduire U , supposons que U est homéomorphe à \mathbb{R}^2 et relativement compact. Le théorème 4.1 du chapitre 4 nous donne l'existence d'un difféomorphisme F appartenant à \mathcal{U} et d'une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ fermée simple de classe C^1 tels que :

- le point p est un point périodique elliptique de période k pour F ,
- l'image de γ est incluse dans U et p appartient à $\text{int}_U(\gamma)$,
- la courbe γ est une courbe invariante par F^k dont F^k préserve l'orientation et sur l'image de laquelle F^k possède un nombre fini de points périodiques tous hyperboliques,
- l'application F coïncide avec f hors de U .

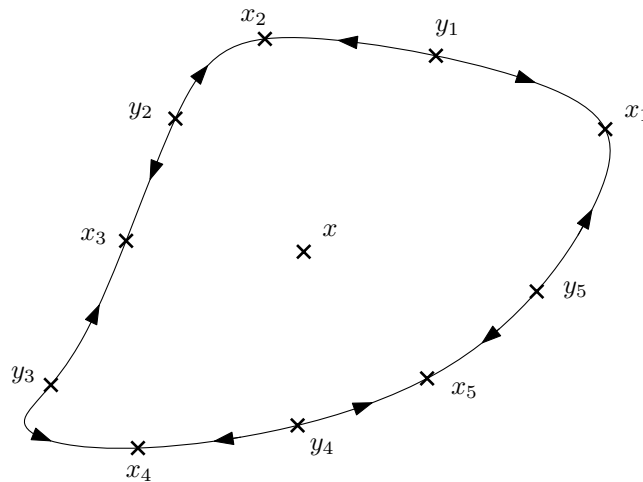
Désormais nous allons travailler avec cette application F pour trouver une application g dans \mathcal{U} convenable qui coïncide avec F hors de U . Ce qui impliquera que g coïncide avec f hors de U puisque F coïncide avec f hors de U . Nous allons donc noter f cette nouvelle application F .

D'après la proposition 4.13, l'ensemble $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est la réunion des variétés stables ou instables des points périodiques de f appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Soit donc $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une famille de points du cercle tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $s_{i-1} < s_i < s_{i+1}$ et tels que les $x_i = \gamma(s_i)$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les points périodiques hyperboliques de F appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$ dont la variété stable est incluse dans $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Puis $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une famille de points du cercle tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $s_i < t_i < s_{i+1}$ et tels que les $y_i = \gamma(t_i)$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les points périodiques hyperboliques de F appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$ dont la variété instable est incluse dans $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Voici le schéma que nous obtenons :



Ainsi pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, nous avons ces égalités d'ensembles :

$$W^s(x_i, f) = \gamma([t_{i-1}; t_i]) \text{ et } W^u(y_i, f) = \gamma(]s_i; s_{i+1}[).$$

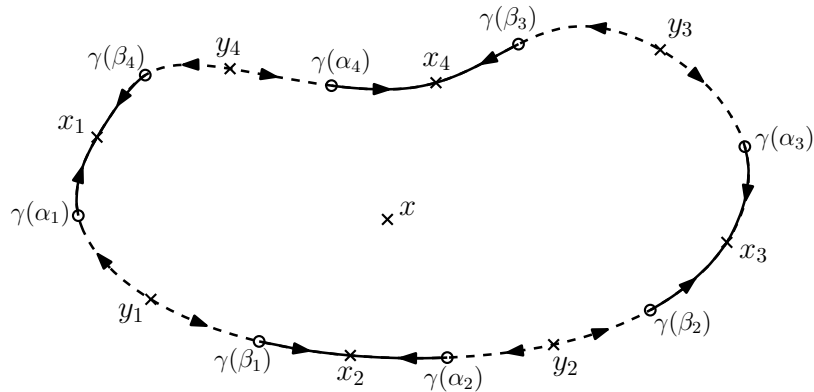
Ce qui permet d'écrire ces inclusions d'ensembles :

$$\gamma(]s_i; t_i]) \subseteq W^s(x_i, f) \cap W^u(y_i, f) \text{ et } \gamma(]t_i; s_{i+1}[) \subseteq W^u(y_i, f) \cap W^s(x_{i+1}, f). \quad (\star)$$

Le problème est donc de rendre ces variétés stables et instables transverses ce qui n'est pas encore le cas puisque leurs intersections sont des images d'arcs de classe C^1 .

Soit $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, considérons les points du cercles α_i et β_i appartenant respectivement à $]s_i; t_i[$ et à $]t_i; s_{i+1}[$ tels que $\gamma'(\alpha_i)$ et $\gamma'(\beta_i)$ sont des vecteurs non nuls. Ainsi

$$\gamma(]s_{i-1}; \alpha_i]) \subseteq W^s(x_i, f) \text{ et } \gamma(]t_i; \beta_i]) \subseteq W^u(y_i, f).$$



Quelque soit $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, notons u_i le point $\gamma(\alpha_i)$ et v_i le point $\gamma(\beta_i)$.

Comme f préserve l'orientation de la courbe γ , les points périodiques de f ont tous la même période que nous allons noter m (cf. la proposition 2.33 du chapitre 1).

Nous allons perturber f au voisinage de chacun des points $f^{-m}(u_1), \dots, f^{-m}(u_n), f^{-m}(v_1), \dots, f^{-m}(v_n)$ en utilisant la proposition 2.6 du chapitre 4 qui perturbe la différentielle d'un difféomorphisme en un point de façon à obtenir un difféomorphisme g appartenant à \mathcal{U} tel que :

- le point x est un point fixe elliptique pour g ,
- les points $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ restent des points fixes hyperboliques pour g ,
- les arcs $\gamma(]s_{i-1}; \alpha_i])$ sont encore inclus dans $W^s(x_i, g)$,
- chaque variété instable des y_i contient une courbe très proche de $\gamma(]t_i; \beta_i])$ mais transverse en $\gamma(\alpha_i)$ à $\gamma(]s_{i-1}, \alpha_i])$ et en $\gamma(\beta_i)$ à $\gamma(]t_i; \beta_i])$.

Dans un premier temps nous allons supposer que les points $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des points fixes de f puis nous expliquerons comment procéder lorsque m , la période des x_i et des y_i , est un entier non nul quelconque.

Soit \mathcal{V} un voisinage de l'identité dans $Diff_\omega^1(M)$ tel que si ϕ_1, \dots, ϕ_l sont des applications qui appartiennent à \mathcal{V} et dont les supports sont disjoints alors $\phi_l \circ \dots \circ \phi_1 \circ F$ appartient à \mathcal{U} (le support d'une application h est l'adhérence de $\{x \in M \mid h(x) \neq x\}$).

Plaçons nous tout d'abord sur $\gamma(]s_1; s_2])$ et travaillons au voisinage de u_1 et de v_1 .

Identifions le sous ensemble $[s_1; s_2]$ du cercle avec un intervalle de \mathbb{R} inclus dans $[0; 1]$. Travaillons alors avec un relevé de f qui, malgré l'abus de notation, est encore notée f .

Voici tout d'abord un résultat qui va nous être utile tout au long de cette preuve.

LEMME 3.2. — Soit t appartenant à $[s_1; s_2]$.

– Si $t \in]s_1; t_1[$, la suite $(\gamma^{-1} \circ f^n \circ \gamma(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante de $]s_1; t_1[$ qui converge vers s_1 alors que la suite la suite $(\gamma^{-1} \circ f^{-n} \circ \gamma(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de $]s_1; t_1[$ qui converge vers t_1 .

– Si $t \in]t_1; s_2[$, la suite $(\gamma^{-1} \circ f^n \circ \gamma(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de $]t_1; s_2[$ qui converge vers s_2 alors que la suite la suite $(\gamma^{-1} \circ f^{-n} \circ \gamma(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante de $]t_1; s_2[$ qui converge vers t_1 .

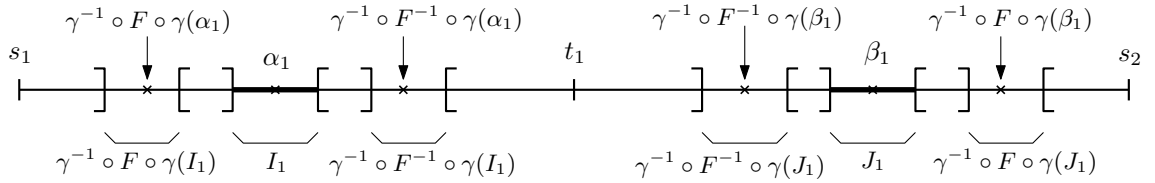
Preuve . — Traitons le cas où $t \in]s_1; t_1[$, le cas où $t \in]t_1; s_2[$ se traitant de la même façon.

L'application f préserve l'orientation de la courbe γ et admet $x_1 = \gamma(s_1)$ et $y_1 = \gamma(t_1)$ comme seuls points fixes sur $\gamma([s_1; t_1])$. Par conséquent les applications $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$ et $\gamma^{-1} \circ f^{-1} \circ \gamma$ sont des homéomorphismes strictement croissants de $[s_1; t_1]$. Ainsi la suite de terme général $\gamma^{-1} \circ f^n \circ \gamma(t) = (\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma)^n(t)$ et la suite de terme général $\gamma^{-1} \circ f^{-n} \circ \gamma(t) = (\gamma^{-1} \circ f^{-1} \circ \gamma)^n(t)$ sont des suites strictement monotones incluses dans $[s_1; t_1]$ et qui convergent vers s_1 ou t_1 .

Or $\gamma(t)$ appartient à $\gamma(]s_1; t_1[)$ qui, d'après (\star) , est inclus dans $W^s(x_1, f) \cap W^u(y_1, f)$. La suite $(f^n \circ \gamma(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $x_1 = \gamma(s_1)$ et la suite $(f^{-n} \circ \gamma(t))_{n \in \mathbb{N}}$ vers $y_1 = \gamma(t_1)$.

Ce qui implique que la suite $(\gamma^{-1} \circ f^n \circ \gamma(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et converge vers s_1 pendant que la suite $(\gamma^{-1} \circ f^{-n} \circ \gamma(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et converge vers t_1 . ■

Les réels α_1 et β_1 n'étant pas des points fixes de $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$, il existe donc I_1 un intervalle ouvert contenant α_1 inclus dans $]s_1; t_1[$ et J_1 un intervalle ouvert contenant β_1 inclus dans $]t_1; s_2[$ tels que les ensembles $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma(I_1) \cap I_1$ et $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma(J_1) \cap J_1$ sont vides.



Soit U_1 et V_1 deux voisinages disjoints respectivement de u_1 et de v_1 tels que :

$$U_1 \cap \gamma(\mathbb{T}^1) = \gamma(I_1),$$

$$V_1 \cap \gamma(\mathbb{T}^1) = \gamma(J_1).$$

Appliquons deux fois la proposition 2.6 du chapitre 3, une fois au voisinage de $F^{-1}(u_1)$ avec le vecteur non nul $\gamma'(\alpha_1)$ et une fois au voisinage de $f^{-1}(v_1)$ avec le vecteur, lui aussi non nul, $\gamma'(\beta_1)$:

1. il existe ψ_1 dans le voisinage \mathcal{V} de l'identité défini ci-dessus tel que :

- $\psi_1(u_1) = u_1$,
- ψ_1 coïncide avec l'identité sur $M \setminus U_1$,

– $D\psi_1(u_1)\gamma'(\alpha_1) \notin \mathbb{R}\gamma'(\alpha_1)$.

2. il existe ψ_2 dans le voisinage \mathcal{V} de l'identité défini ci-dessus tel que :

- $\psi_2(v_1) = v_1$,
- ψ_2 coïncide avec l'identité sur $M \setminus V_1$,
- $D\psi_2(v_1)\gamma'(\beta_1) \notin \mathbb{R}\gamma'(\beta_1)$.

Notons $\phi_1 = \psi_1 \circ \psi_2$ et $f_1 = \phi_1 \circ f$. Par construction du voisinage \mathcal{U} , ψ_1 et ψ_2 étant à support disjoint, l'application f_1 appartient à \mathcal{U} .

Voici un lemme vérifié par l'application ϕ_1 :

LEMME 3.3. — *L'application ϕ_1 coïncide avec l'identité hors de $U_1 \cup V_1$, avec ψ_1 sur U_1 et avec ψ_2 sur V_1 . De plus $\phi_1(U_1) = U_1$ et $\phi_1(V_1) = V_1$.*

Preuve. — L'application ψ_1 est un difféomorphisme de M qui coïncide avec l'identité hors de U_1 donc $\psi_1(U_1) = U_1$. De même l'application ψ_2 est un difféomorphisme de M qui coïncide avec l'identité hors de V_1 donc $\psi_2(V_1) = V_1$. Or $\phi_1 = \psi_2 \circ \psi_1$ et U_1 et V_1 sont disjoints. Par conséquent :

- si $x \in U_1$, $\psi_1(x) \in U_1$. Donc $\phi_1(x) = \text{id} \circ \psi_1(x) = \psi_1(x)$,
- si $x \in V_1$, alors $x \notin U_1$. Donc $\psi_1(x) = x$ et $\phi_1(x) = \psi_2(x)$,
- si $x \notin U_1 \cup V_1$, alors $\psi_1(x) \notin U_1$. Donc $\psi_1(x) = x$. Mais $x \notin V_1$ donc $\psi_2(x) = x$. Ainsi $\phi_1(x) = x$.

L'application ϕ_1 coïncide donc avec ψ_1 sur U_1 , avec ψ_2 sur V_1 et avec l'identité hors de $U_1 \cup V_1$. En particulier $\phi_1(U_1) = U_1$ et $\phi_1(V_1) = V_1$. ■

Comme $u_1 = \gamma(\alpha_1)$ appartient à V_1 et que $v_1 = \gamma(\beta_1)$ appartient à V_2 , en utilisant les propriétés de ϕ_1 démontrées dans le lemme ci-dessus, nous avons les égalités suivantes :

$$\phi_1(\gamma(\alpha_1)) = \psi_1(u_1) = u_1 = \gamma(\alpha_1),$$

$$\phi_1(\gamma(\beta_1)) = \psi_2(v_1) = v_1 = \gamma(\beta_1).$$

Ce qui permet de considérer l'application, notée γ_1 , définie sur $[s_1; s_2]$ par :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [s_1; s_2] &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [s_1; \alpha_1] \cup [\beta_1; s_2] \\ \phi_1(\gamma(t)) & \text{si } t \in [\alpha_1; \beta_1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Notons que l'application γ_1 est continue. Voici immédiatement un résultat qui concerne l'application γ_1 .

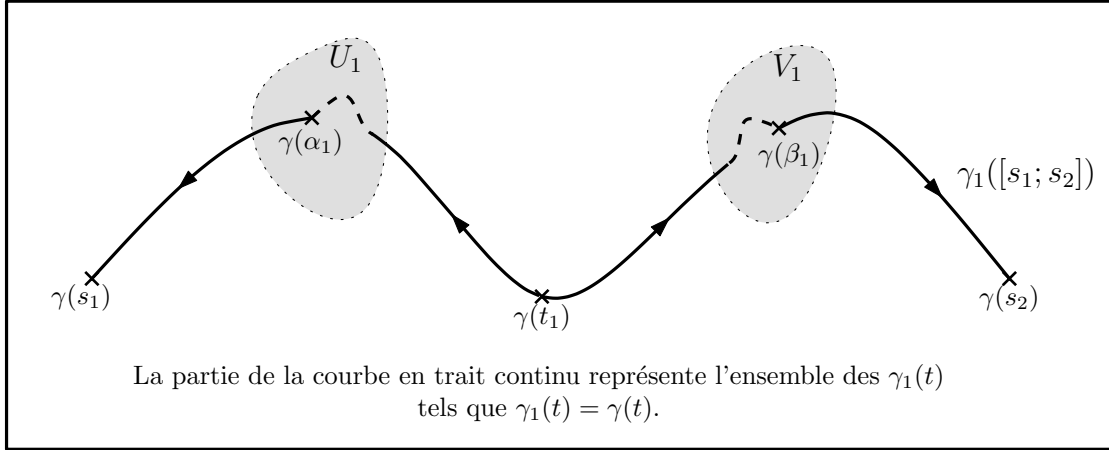
LEMME 3.4. — *Soit $t \in [s_1; s_2]$, $t \notin I_1 \cup J_1 \iff \gamma(t) \notin U_1 \cup V_1 \implies \gamma(t) = \gamma_1(t)$.*

Preuve. — La première équivalence résulte du fait que $\gamma(\mathbb{T}^1) \cap (U_1 \cup V_1) = I_1 \cup J_1$.

Pour l'implication suivante, il faut considérer que ϕ_1 coïncide avec l'identité hors de $U_1 \cup V_1$. On obtient donc :

$$\gamma(t) \notin U_1 \cup V_1 \implies \phi_1(\gamma(t)) = \text{id}(\gamma(t)) \implies \gamma_1(t) = \gamma(t).$$

■



Le lemme ci-dessus permet alors d'obtenir avec le lemme 3.2 le résultat suivant :

LEMME 3.5. — Soit $t \in [s_1; s_2]$.

- Si $t \in [s_1; \alpha_1]$ alors pour tout entier n positif, $f_1^n(\gamma_1(t)) = f^n(\gamma(t)) \in \gamma_1([s_1; \alpha_1])$.
- Si $t \in [\alpha_1; \beta_1]$ alors pour tout entier n strictement positif, $f_1^{-n}(\gamma_1(t)) = f^{-n}(\gamma(t)) \in \gamma_1([\alpha_1; \beta_1])$.
- Si $t \in [\beta_1; s_2]$ alors pour tout entier n positif, $f_1^n(\gamma_1(t)) = f^n(\gamma(t)) \in \gamma_1([\beta_1; s_2])$.

Preuve . — Supposons que t appartient à $[s_1; t_2]$, le cas où t appartient sur $[t_2; s_1]$ se traitant de la même manière.

- Soit $t \in [s_1; \alpha_1]$. Supposons avoir démontré que :

$$f_1(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) \in \gamma([s_1; \alpha_1]). \quad (1)$$

Par une récurrence simple, on obtient que pour tout entier n positif,

$$f_1^n(\gamma(t)) = f^n(\gamma(t)) \in \gamma([s_1; \alpha_1]).$$

En utilisant le fait que $(\gamma_1)|_{[s_1; \alpha_1]} = \gamma|_{[s_1; \alpha_1]}$, on obtient bien que $f_1^n(\gamma_1(t)) = f^n(\gamma(t)) \in \gamma_1([s_1; \alpha_1])$.

Démontrons donc (1). Le réel t appartenant à $[s_1; \alpha_1]$, $\gamma_1(t) = \gamma(t)$. Ainsi $f_1(\gamma_1(t)) = \phi_1 \circ f(\gamma(t))$. Or d'après le lemme 3.2, la suite $(\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante de $]s_1; t_1[$. Nous obtenons donc l'inégalité suivante :

$$s_1 < \gamma^{-1} \circ f \circ \gamma(t) < t \leq \alpha_1.$$

Par conséquent $f(\gamma(t)) \in \gamma(]s_1; \alpha_1])$. De plus :

- si $t \in I_1$, comme $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma(I_1) \cap I_1 = \emptyset$, on en déduit que $f(\gamma(t)) \notin I_1$,
- si $t \notin I_1$. Comme le réel t est plus petit que $\alpha_1 \in I_1$, il est plus petit que la borne inférieure a de I_1 . En utilisant l'inégalité ci-dessus, on en déduit que le réel $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma(t)$ est strictement plus petit que a et qu'il n'appartient donc pas I_1 . Ainsi $f(\gamma(t)) \notin I_1$.

Dans tous les cas, on obtient que le point $f(\gamma(t))$ appartient à $\gamma(]s_1; \alpha_1] \setminus I_1)$. Donc $F(\gamma(t))$ n'appartient pas à $U_1 \cup V_1$. Or ϕ_1 coïncide avec l'identité hors de $U_1 \cup V_1$. Par conséquent,

$$f_1(\gamma_1(t)) = \phi_1(f(\gamma(t))) = f(\gamma(t)) \in \gamma([s_1; \alpha_1]).$$

- Soit $t \in [\alpha_1; t_1]$. Supposons avoir démontré que :

$$f_1^{-1}(\gamma_1(t)) = f^{-1}(\gamma(t)) \in \gamma([\alpha_1; t_1] \setminus I_1). \quad (2)$$

En utilisant que γ_1 coïncide avec γ sur $[\alpha_1; t_1] \setminus I_1$, on obtient, par une récurrence simple, que pour tout entier n positif,

$$f_1^{-n}(\gamma_1(t)) = f^{-n}(\gamma(t)) \in \gamma_1([s_1; \alpha_1]).$$

Ce qui démontre en utilisant à nouveau que γ_1 coïncide avec γ sur $[\alpha_1; t_1] \setminus I_1$ que $f_1^{-n}(\gamma_1(t)) = f^{-n}(\gamma(t)) \in \gamma_1([\alpha_1; t_1])$.

Démontrons donc (2). Le réel t appartenant à $[\alpha_1; t_1]$, $\gamma_1(t) = \phi_1 \circ \gamma(t)$. Ainsi :

$$f_1^{-1}(\gamma_1(t)) = (\phi_1 \circ f)^{-1}(\phi_1 \circ \gamma(t)) = f^{-1}(\gamma(t)).$$

Il reste donc à vérifier que $f^{-1}(\gamma(t))$ appartient à $\gamma([\alpha_1; t_1] \setminus I_1)$. Or d'après le lemme 3.2, la suite $(\gamma^{-1} \circ f^{-n} \circ \gamma(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de $]s_1; t_1[$. Nous obtenons donc l'inégalité suivante :

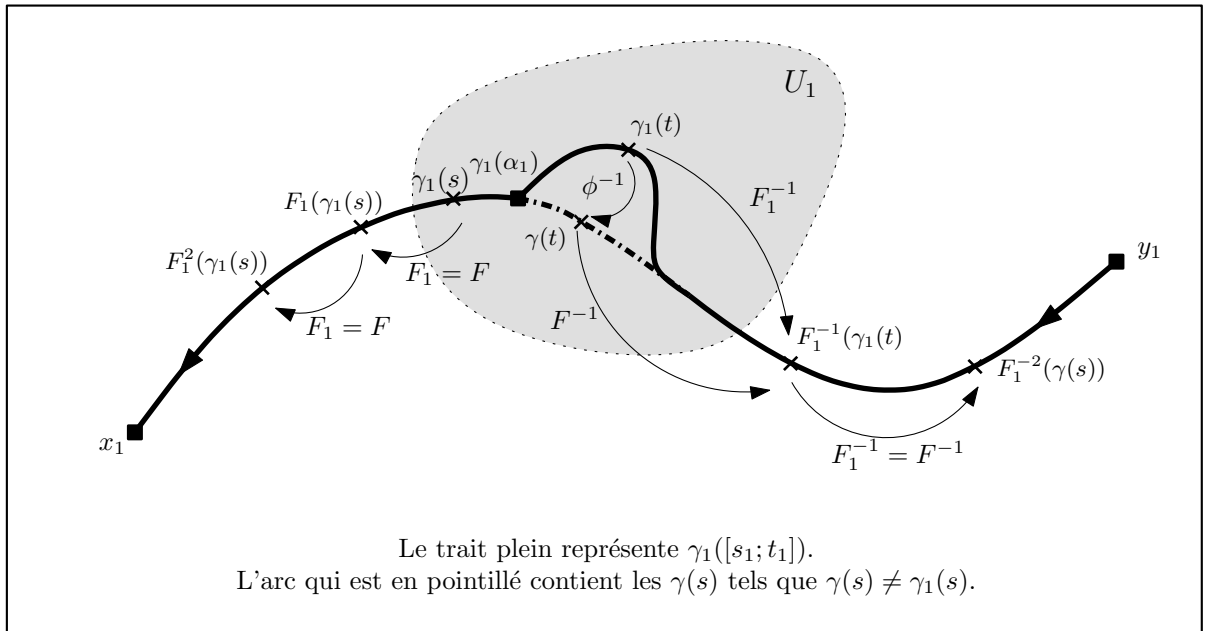
$$t_1 > \gamma^{-1} \circ f^{-1} \circ \gamma(t) > t \geq \alpha_1.$$

Par conséquent $f^{-1}(\gamma(t)) \in \gamma(] \alpha_1; t_1 [)$. De plus :

- si $t \in I_1$, comme $\gamma^{-1} \circ f^{-1} \circ \gamma(I_1) \cap I_1 = \emptyset$, on en déduit que $f^{-1}(\gamma(t)) \notin I_1$,
- si $t \notin I_1$. Comme le réel t est plus grand que $\alpha_1 \in I_1$, il est plus grand que la borne supérieure b de I_1 . En utilisant l'inégalité ci-dessus, on en déduit que le réel $\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma(t)$ est strictement plus grand que b et qu'il n'appartient donc pas à I_1 . Ainsi $f^{-1}(\gamma(t)) \notin I_1$.

Dans tous les cas, on obtient que le point $f^{-1}(\gamma(t))$ appartient à $\gamma([\alpha_1; t_1] \setminus I_1)$. Ce qui est le résultat souhaité.

Voici un schéma qui illustre ce que nous venons de démontrer :



Ainsi en utilisant le lemme 3.2, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_1^n(\gamma_1(t)) = x_1, \quad \forall t \in [s_1; \alpha_1],$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_1^n(\gamma_1(t)) = x_2, \forall t \in [\beta_1; s_2],$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_1^{-n}(\gamma_1(t)) = y_1, \forall t \in [\alpha_1; \beta_1].$$

Ce qui démontre les inclusions suivantes :

$$\gamma_1([s_1; \alpha_1]) \subseteq W^s(x_1, f_1)$$

$$\gamma_1([\beta_1; s_2]) \subseteq W^s(x_2, f_1)$$

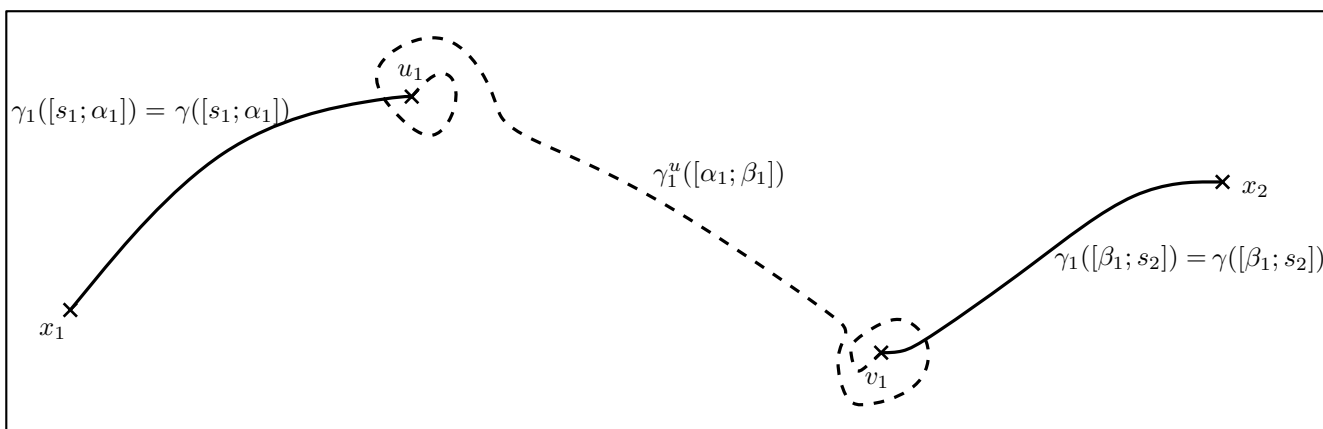
$$\gamma_1([\alpha_1; \beta_1]) \subseteq W^u(y_1, f_1).$$

On obtient aussi que $\gamma_1([s_1; \alpha_1])$ et $\gamma_1([\beta_1; s_2])$ sont stables par f_1 alors que $\gamma_1([\alpha_1; \beta_1])$ est stable par f_1^{-1} . Remarquons que l'application γ_1 est définie comme la concaténation de trois arcs de classe C^1 , $\gamma_{[s_1; \alpha_1]}$, $\gamma_{[\beta_1; s_2]}$ et $\phi_1 \circ \gamma : [\alpha_1; \beta_1] \rightarrow M$, qui se rencontrent transversalement en u_1 et v_1 car :

$$(\phi_1 \circ \gamma)'(\alpha_1) = D\phi_1(u_1)(\gamma'(\alpha_1)) = D\psi_1(u_1)(\gamma'(\alpha_1)) \notin \mathbb{R}\gamma'(\alpha_1),$$

$$(\phi_1 \circ \gamma)'(\beta_1) = D\phi_1(v_1)(\gamma'(\beta_1)) = D\psi_2(v_1)(\gamma'(\beta_1)) \notin \mathbb{R}\gamma'(\beta_1).$$

Pour que cette application γ_1 soit un arc, il lui manque d'être injective. Voici en effet ce qui peut se produire :



c'est-à-dire que $\gamma_1([\alpha_1; \beta_1])$ rencontre $\gamma_1([s_1; \alpha_1])$ ou $\gamma_1([\beta_1; s_2])$ ailleurs qu'en u_1 ou v_1 .

Plus précisément voici ce qui arrive si γ_1 n'est pas injective. Soit t et s deux réels distincts dans $[s_1; s_2]$ tels que $\gamma_1(t) = \gamma_1(s)$.

L'application γ étant injective, $\gamma_1(s) \neq \gamma(s)$ ou $\gamma_1(t) \neq \gamma(t)$. Supposons que c'est $\gamma_1(s)$ qui est différent de $\gamma(s)$. Ainsi $\gamma(s)$ appartient à $U_1 \cup V_1$ et s appartient à $] \alpha_1; \beta_1[$. Par conséquent :

$$s \in] \alpha_1; \beta_1[\cap (I_1 \cup J_1).$$

Remarquons que $\gamma_1(s) = \phi_1 \circ \gamma(s)$ Traitons le cas où s appartient à I_1 , le cas où s appartient à J_1 se traitant de la même façon. Ainsi $s \in] \alpha_1; \beta_1[\cap I_1 =] \alpha_1; t_1[\cap I_1$.

Comme $s \in I_1$, le point $\gamma(s)$ appartient à U_1 . Or d'après le lemme 3.8, $\phi_1(U_1) = U_1$. Par conséquent $\gamma_1(s) = \phi_1(\gamma(s))$ appartient aussi à U_1 . D'où l'on déduit que :

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(s) \in U_1.$$

Si t appartient $[\alpha_1; \beta_1]$, $\phi_1(\gamma(t)) = \gamma_1(t) = \gamma_1(s) = \phi_1(\gamma_1(s))$. Ce qui implique que $s = t$ par injectivité de ϕ_1 et de γ . Ceci est contraire au fait que l'on ait supposé que $s \neq t$.

Donc $t \in [s_1; \alpha_1[\cup]\beta_1; t_1]$ et $\gamma_1(t) = \gamma(t)$. Ainsi $\gamma(t)$ appartenant à U_1 , le réel t appartient à I_1 . Il est donc démontré que t appartient à $([s_1; \alpha_1[\cup]\beta_1; t_1]) \cap I_1 = I_1 \cap]s_1; \alpha_1[$.

De plus $s \in]\alpha_1; t_1[\cap I_1$. De l'égalité $\gamma(t) = \gamma_1(t) = \gamma_1(s) = \phi_1 \circ \gamma(s)$, on déduit alors que :

$$(\gamma([s_1; \alpha_1] \cap I_1)) \cap (\phi_1 \circ \gamma(] \alpha_1; t_1] \cap I_1)) \neq \emptyset. \quad (**)$$

Si $s \in J_1$, on obtient de la même façon que t et s appartiennent respectivement à $] \beta_1; s_2[\cap J_1$ et à $]t_1; \beta_1[\cap J_1$, et l'égalité suivante est vérifiée :

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) = \gamma_1(s) = \phi_1 \circ \gamma(s),$$

ce qui signifie que :

$$(\gamma(] \beta_1; s_2[\cap J_1)) \cap (\phi_1 \circ \gamma(]t_1; \beta_1[\cap J_1)) \neq \emptyset. \quad (***)$$

Remarquons que les assertions **(**)** et **(***)** correspondent à ce qui a été dessiné ci-dessus.

Mais le lemme suivant va nous assurer que si ϕ_1 est suffisamment proche de l'identité et si I_1 est un voisinage suffisamment petit de α_1 , les propositions **(**)** et **(***)** ne sont pas vérifiées. Ce qui nous donnera l'injectivité de γ_1 .

LEMME 3.6. — Soit a, b, c trois réels tels que $a < b < c$ et $\gamma :]a; c[\rightarrow M$ un arc de classe C^1 tel que $\gamma'(b) \neq 0$. Il existe J un intervalle ouvert contenant b et \mathcal{W} un voisinage de l'identité dans $C^1(M)$ tel que pour tout ϕ appartenant à \mathcal{W} vérifiant $\phi \circ \gamma(b) = \gamma(b)$ alors :

$$(\gamma(]a; b[\cap J)) \cap (\phi \circ \gamma(]b; c[\cap J)) = \emptyset.$$

Preuve. — Travaillons en coordonnées au voisinage de $\gamma(b)$ et quitte à réduire l'intervalle $]a; c[$, supposons que γ est à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Si u et v sont deux vecteurs de \mathbb{R}^2 , nous noterons $u \cdot v$ le produit scalaire usuel de u et v .

Considérons l'application, notée δ , à valeurs réelles, définie sur $]a; c[$ par $\delta(t) = \gamma'(t) \cdot \gamma'(b)$. Comme $\gamma'(b)$ est un vecteur non nul, le nombre $\delta(b) = \|\gamma'(b)\|^2$ est strictement positif.

Par continuité de δ , il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [b - \alpha; b + \alpha]$:

$$\delta(t) = \gamma'(t) \cdot \gamma'(b) > 0.$$

Considérons alors le réel η strictement positif défini par :

$$\eta = \min_{t \in [b - \alpha; b + \alpha]} \frac{\gamma'(t) \cdot \gamma'(b)}{\|\gamma'(t)\| \|\gamma'(b)\|}.$$

Posons $I =]b - \alpha; b + \alpha[$ puis \mathcal{W} le voisinage de l'identité défini par :

$$\mathcal{W} = \{\phi \in C^1(M) \mid \|D\phi(x) - \text{id}\| < \eta, \forall x \in \gamma([b - \alpha; b + \alpha])\}$$

(remarquons que \mathcal{W} est aussi un voisinage de l'identité pour la C^1 topologie faible de Whitney).

Vérifions alors que l'intervalle I et le voisinage \mathcal{W} de l'identité ainsi construits conviennent. Soit donc $\phi \in \mathcal{W}$ tel que $\phi \circ \gamma(b) = \gamma(b)$. Voici un résultat qui concerne ϕ et I :

SOUS LEMME 3.7. — Soit t appartenant à J ,

- si t appartient à $]a; b[$ alors $(\gamma(t) - \gamma(b)) \cdot \gamma'(b) < 0$,
- si t appartient à $]b; c[$ alors $(\phi \circ \gamma(t) - \gamma(b)) \cdot \gamma'(b) > 0$.

Preuve du sous lemme 3.7. — Pour le premier point, considérons l'application δ_1 définie sur $]a; c[$ par $\delta_1(t) = (\gamma(t) - \gamma(b)) \cdot \gamma'(b)$. C'est une application à valeurs réelles de classe C^1 telle que $\delta_1'(t) = \gamma'(t) \cdot \gamma'(b)$. Or pour tout $t \in J$, $\gamma'(t) \cdot \gamma'(b) > 0$. Ce qui implique que δ_1 est strictement croissante sur J . Or $\delta_1(b) = 0$.

Par conséquent, pour tout $t \in]a; b[\cap I$, on obtient l'inégalité suivante :

$$(\gamma(t) - \gamma(b)) \cdot \gamma'(b) = \delta_1(t) < \delta_1(b) = 0.$$

Pour le second point, considérons δ_2 définie sur $]a; c[$ par $\delta_2(t) = (\phi \circ \gamma(t) - \gamma(b)) \cdot \gamma'(b)$. C'est une application à valeurs réelles de classe C^1 telle que $\delta_2'(t) = D\phi(\gamma(t))\gamma'(t) \cdot \gamma'(b)$. Ainsi pour tout $t \in J$, nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \delta_2'(t) &= D\phi(\gamma(t))\gamma'(t) \cdot \gamma'(b) \\ &= ((D\phi(\gamma(t)) - \text{id})\gamma'(t)) \cdot \gamma'(b) + \gamma'(t) \cdot \gamma'(b) \\ &\geq \gamma'(t) \cdot \gamma'(b) - |(D\phi(\gamma(t)) - \text{id})\gamma'(t)| \cdot \|\gamma'(b)\| \\ &> \gamma'(t) \cdot \gamma'(b) - \eta \|\gamma'(t)\| \|\gamma'(b)\| > 0 \\ &\geq \gamma'(t) \cdot \gamma'(b) - \frac{\gamma'(t) \cdot \gamma'(b)}{\|\gamma'(t)\| \|\gamma'(b)\|} \|\gamma'(t)\| \|\gamma'(b)\| = 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique là aussi que δ_2 est strictement croissante sur J . Or $\delta_2(b) = 0$ car $\phi \circ \gamma(b) = \gamma(b)$. Par conséquent, pour tout $t \in]b; c[\cap I$, on obtient l'inégalité suivante :

$$(\gamma(t) - \gamma(b)) \cdot \gamma'(b) = \delta_2(t) > \delta_2(b) = 0.$$

■

Terminons à présent la preuve du lemme 3.6.

Soit $s \in]a; b[\cap I$ et $t \in]b; c[\cap I$. D'après le résultat ci-dessus, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$(\gamma(s) - \gamma(b)) \cdot \gamma'(b) < (\phi \circ \gamma(t) - \gamma(b)) \cdot \gamma'(b),$$

ce qui implique que le point $\gamma(s)$ et $\phi \circ \gamma(t)$ ne peuvent être confondus. D'où le fait que $(\gamma(]a; b[\cap J))$ et $(\phi \circ \gamma(]b; c[\cap J))$ ont une intersection disjointe. ■

D'après ce lemme, nous obtenons bien que si l'application ϕ_1 est suffisamment proche de l'identité au sens de la C^1 topologie forte de Whitney et si I_1 et J_1 sont des intervalles assez petits contenant respectivement α_1 et β_1 alors les propositions $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$ ne sont pas vérifiées. Ce qui assure de l'injectivité de γ_1 .

On procède de la même façon sur $\gamma([s_i; s_{i+1}])$ au voisinage de $u_i = \gamma(\alpha_i)$ et de $v_i = \gamma(\beta_i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On trouve ainsi pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

- des voisinages U_i et V_i respectivement de $\gamma(\alpha_i)$ et $\gamma(\beta_i)$ tels que $U_i \cap \gamma(\mathbb{T}^1) \subseteq \gamma(]s_i; t_i])$ et $V_i \cap \gamma(\mathbb{T}^1) \subseteq \gamma(]t_i; s_{i+1}[)$,

- une application ϕ_i appartenant au voisinage \mathcal{V} de l'identité et dont le support (qui est égal à l'adhérence de $\{x \in M \mid \phi_i(x) \neq x\}$) est inclus dans $U_i \cup V_i$,

• un arc continu $\gamma_i : [s_i; s_{i+1}] \rightarrow M$ dont la restriction sur $[s_i; \alpha_i]$ coïncide avec $\gamma|_{[s_i; \alpha_i]}$, la restriction sur $[\alpha_i; \beta_i]$ coïncide avec $\phi \circ \gamma : [\alpha_i; \beta_i] \rightarrow M$ et celle sur $[\beta_i; s_{i+1}]$ avec $\gamma|_{[\beta_i; s_{i+1}]}$,

ces objets vérifiant les quatre assertions suivantes :

1. $\gamma'(\alpha_i)$ et $(\phi_i \circ \gamma)'(\alpha_i)$ d'une part et $\gamma'(\beta_i)$ et $(\phi_i \circ \gamma)'(\beta_i)$ d'autre part ne sont pas des vecteurs colinéaires,
2. pour tout $t \in [s_i; s_{i+1}]$, $\gamma_i(t) \notin U_i \cup V_i \implies \gamma_i(t) = \gamma(t)$,
3. Pour tout $t \in [s_i; \alpha_i] \cup [\beta_i; s_{i+1}]$, $(\phi_i \circ f)^n(\gamma_i(t)) = f^n(\gamma(t)) \in \gamma_i([s_i; s_{i+1}])$ et pour tout $t \in [\alpha_i; \beta_i]$, $(\phi_i \circ F)^{-n}(\gamma_i(t)) = F^{-n}(\gamma(t)) \in \gamma_i([s_i; s_{i+1}])$,
4. $\gamma_i([s_i; \alpha_i])$ et $\gamma_i([\beta_i; s_{i+1}])$ sont stables par $\phi_i \circ f$ alors que $\gamma_i([\alpha_i; \beta_i])$ est stable par $(\phi_i \circ F)^{-1}$.

Considérons alors l'application g de M définie par :

$$g = \phi_n \circ \dots \circ \phi_1 \circ f.$$

A condition d'avoir pris les U_i et les V_i deux à deux disjoints, cette application g appartient au voisinage \mathcal{U} de f .

Puis définissons l'application $\tilde{\gamma}$ définie sur le cercle \mathbb{T}^1 par :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : \mathbb{T}^1 &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma_i(t) \text{ si } t \in [s_i; s_{i+1}] \end{aligned}$$

Remarquons que $\tilde{\gamma}$ est une application continue qui coïncide avec γ sur $[\beta_{i-1}; \alpha_i]$ et avec $\phi_i \circ \gamma$ sur $[\alpha_i; \beta_i]$. Elle est donc la concaténation des arcs de classe C^1 , notés γ_i^s et γ_i^u , définis par :

$$\begin{aligned} \gamma_i^s : [\beta_{i-1}; \alpha_i] &\rightarrow M & \text{et} & & \gamma_i^u : [\alpha_i; \beta_i] &\rightarrow M \\ t &\mapsto \gamma(t) & & & t &\mapsto \phi_i(\gamma(t)) \end{aligned}$$

D'après le point 1 ci-dessus, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les vecteurs $(\gamma_i^s)'(\alpha_i)$ et $(\gamma_i^u)'(\alpha_i)$ d'une part et les vecteurs $(\gamma_i^u)'(\beta_i)$ et $(\gamma_{i+1}^s)'(\beta_i)$ d'autre part ne sont pas colinéaires.

Remarquons en outre que $x_i = \gamma(s_i)$ appartient à $\gamma_i^s([\beta_{i-1}; \alpha_i])$.

De même, $y_i = \gamma(t_i)$ n'appartient pas à $U_i \cup V_i$. Par conséquent $\gamma(t_i) = \gamma_i(t_i) = \phi_i \circ \gamma(t_i) = \gamma_i^u(t_i)$. Ce qui implique que $y_i = \gamma_i^u(t)$ appartient à $\gamma_i^u([\alpha_i; \beta_i])$.

Pour démontrer que cette courbe $\tilde{\gamma}$ et ces arcs γ_i^s et γ_i^u , $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ permettent à g et x de vérifier la propriété Γ relativement à U , il reste à prouver les cinq points suivants :

- a) le point x est un point fixe elliptique de g ,
- b) la courbe $\tilde{\gamma}$ est une courbe fermée simple dont l'image est incluse dans U ,
- c) le point x appartient à $\text{int}_U(\tilde{\gamma})$,
- d) les points $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des points périodiques hyperboliques pour g ,
- e) les images des arcs γ_i^s et γ_i^u sont respectivement incluses dans $W^s(x_i, g)$ et $W^u(y_i, g)$,
- f) les images des arcs γ_i^s et γ_i^u sont respectivement stables par g^2 et g^{-2} (en fait nous allons vérifier qu'elles sont respectivement stables par g et g^{-1}).

Une fois prouver ces six points, il restera à vérifier que g coïncide avec f hors de U pour que la proposition 3.1 soit vérifiée dans le cas particulier où les points $x, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des points fixes de f .

Voici la démarche que nous allons suivre pour démontrer ces six assertions. Pour vérifier la première assertion, nous allons voir que F coïncide avec f sur un voisinage de x . Nous démontrerons ensuite que si $\tilde{\gamma}(t)$ est différent de $\gamma(t)$ alors $\tilde{\gamma}(t) = g \circ f^{-1}(\gamma(t))$. Ce qui prouve que pour la topologie de la convergence uniforme utilisée dans le premier paragraphe de ce chapitre, $\tilde{\gamma}$ dépend continuellement de g . Ainsi, quitte à réduire le voisinage \mathcal{U} de f dans lequel se trouve g , l'image de $\tilde{\gamma}$ est incluse dans U et que x appartient à $\text{int}_U(\tilde{\gamma})$ (cf. la proposition 1.3). Pour avoir montré les assertions b) et c), il suffira alors de vérifier que $\tilde{\gamma}$ est injective.

Pour démontrer les assertions d) e) et f), nous allons vérifier que $g = \phi_i \circ f$ sur $\tilde{\gamma}([s_i; s_{i+1}])$ ou ce qui revient au même sur $\gamma_i([s_i; s_{i+1}])$. Ce qui, avec les assertions 3 et 4 précédentes permet de conclure. En effet, nous obtenons pour tout $\in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$g^n(\tilde{\gamma}(t)) = f^n(\gamma(t)), \quad \forall t \in [\beta_{i-1}; \alpha_i],$$

$$g^{-n}(\tilde{\gamma}(t)) = f^{-n}(\gamma(t)), \quad \forall t \in [\alpha_i; \beta_i].$$

Or $\gamma([\beta_{i-1}; \alpha_i])$ est inclus dans $W^s(x_i, f)$ et $\gamma([\alpha_i; \beta_i])$ est inclus dans $W^u(y_i, f)$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(\tilde{\gamma}(t)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(\gamma(t)) = x_i, \quad \forall t \in [\beta_{i-1}; \alpha_i],$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-n}(\tilde{\gamma}(t)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(\gamma(t)) = y_i, \quad \forall t \in [\alpha_i; \beta_i].$$

Ce qui implique que $\tilde{\gamma}([\beta_{i-1}; \alpha_i])$ est inclus dans $W^s(x_i, g)$ et $\tilde{\gamma}([\alpha_i; \beta_i])$ est inclus dans $W^u(y_i, g)$. De plus, $\gamma_i([\beta_{i-1}; \alpha_i])$ est stable par g alors que $\gamma_i([\alpha_i; \beta_i])$ est stable par g^{-1} .

Voici tout d'abord un lemme qui concerne les applications ϕ_i :

LEMME 3.8. — *L'application $\phi_n \circ \dots \circ \phi_1$ coïncide avec l'identité hors de $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (U_j \cup V_j)$ et avec ϕ_i hors de $\bigcup_{j \neq i} U_j \cup V_j$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Preuve — Si $x \notin \bigcup_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (U_j \cup V_j)$, $\phi_j(x) = x$ quelque soit $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donc $\phi_n \circ \dots \circ \phi_1(x) = x$. Ce qui implique que $\phi_n \circ \dots \circ \phi_1 = \text{id}$ hors de $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (U_j \cup V_j)$.

Soit $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $x \notin \bigcup_{j \neq i} U_j \cup V_j$.

– Si $x \in U_i \cup V_i$, $\phi_i(x) \in U_i \cup V_i$. Or si $j \neq i$, $\phi_j = \text{id}$ sur $U_i \cup V_i$. Donc $\phi_n \circ \dots \circ \phi_1(x) = \phi_i(x)$.

– Si $x \notin U_i \cup V_i$, alors $\phi_i(x) = x = \phi_n \circ \dots \circ \phi(x)$

Par conséquent, l'application $\phi_n \circ \dots \circ \phi_1$ coïncide avec ϕ_i hors de $\bigcup_{j \neq i} U_j \cup V_j$. ■

Ce qui permet de démontrer...

LEMME 3.9. — *L'application g coïncide avec f sur $M \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f^{-1}(U_j \cup V_j)$.*

Preuve — Si x n'appartient pas à $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f^{-1}(U_i \cup V_i)$ alors $f(x)$ n'appartient pas à $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (U_j \cup V_j)$. Or d'après le lemme ci-dessus, $\phi_n \circ \dots \circ \phi_1$ est égale à l'identité hors de $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (U_j \cup V_j)$. On obtient que :

$$g(x) = \phi_n \circ \dots \circ \phi_1(f(x)) = f(x). \quad \blacksquare$$

A condition que les U_i et les V_j soit suffisamment petits, le point x n'appartient pas à l'adhérence de $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f^{-1}(U_j \cup V_j)$ et $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f^{-1}(U_j \cup V_j)$ peut être inclus dans U . Ce qui démontre que $g = f$ sur un voisinage de x et hors de U .

LEMME 3.10. — Pour tout $t \in \mathbb{T}^1$, si $\tilde{\gamma}(t) \neq \gamma(t)$ alors $\tilde{\gamma}(t) = g \circ f^{-1}(\gamma(t))$.

Démonstration. — Soit $t \in \mathbb{T}^1$ tel que $\tilde{\gamma}(t) \neq \gamma(t)$. Il existe $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que t appartient à $[\alpha_i; \beta_i]$ et tel que $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_i^u(t)$. Comme t appartient à $[\alpha_i; \beta_i]$, le point $\gamma(t)$ n'appartient pas à $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (U_j \cup V_j)$. Ainsi :

$$\gamma_i^u(t) = \phi_i(\gamma(t)) = \phi_n \circ \dots \circ \phi_1(\gamma(t)) = g \circ f^{-1}(\gamma(t)).$$

□

LEMME 3.11. — Pour tout $j \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, l'application g coïncide avec $\phi_i \circ f$ sur $\tilde{\gamma}([s_i; s_{i+1}])$.

Preuve — Soit $t \in [s_i; s_{i+1}]$, nous allons démontrer que $f(\tilde{\gamma}(t))$ n'appartient pas à $\bigcup_{j \neq i} U_j \cup V_j$. Or d'après le lemme 3.8, $\phi_n \circ \dots \circ \phi_i = \phi_i$ hors de cet ensemble. Ce qui permettra de conclure que :

$$g(\tilde{\gamma}(t)) = \phi_n \circ \dots \circ \phi_1 \circ f(\tilde{\gamma}(t)) = \phi_i \circ f(\tilde{\gamma}(t)) = f_i(\tilde{\gamma}(t)).$$

Remarquons tout d'abord que $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_i(t)$.

Supposons qu'il existe $j \neq i$ tel que $f(\gamma_i(t))$ appartienne à $U_j \cup V_j$. Ainsi le point $\gamma_i(t)$ appartient à $f^{-1}(U_j \cup V_j)$. Or les ensembles $f^{-1}(U_j)$, $f^{-1}(V_j)$, U_i et V_i sont disjoints. Par conséquent $\gamma_i(t)$ n'appartient pas à $U_i \cup V_i$. Ce qui implique que $\gamma_i(t) = \gamma(t)$. Ainsi :

$$f(\gamma_i(t)) = f(\gamma(t)) \in U_j \cup V_j.$$

Or $\gamma([s_i; s_{i+1}])$ est invariant par f . Donc $f(\gamma(t))$ appartient aussi à $\gamma([s_i; s_{i+1}])$. Ce qui montre que

$$\gamma([s_i; s_{i+1}]) \cap (U_j \cup V_j) \neq \emptyset.$$

Or ceci est impossible car U_j et V_j ne rencontrent $\gamma(\mathbb{T}^1)$ que sur $\gamma([s_j; s_{j+1}])$ et $i \neq j$. Donc

$$f(\tilde{\gamma}(t)) \notin \bigcup_{j \neq i} U_j \cup V_j.$$

■

LEMME 3.12. — L'application $\tilde{\gamma}$ est injective.

Preuve du lemme 3.12. — Soit t et s deux points du cercle tels que $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{\gamma}(t)$. Soit $i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tel que s appartient à $[s_i; s_{i+1}]$, ainsi $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_i(t)$. Ainsi $\tilde{\gamma}(s) = \gamma_i(s)$ et $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_j(t)$.

– Si $\gamma_i(s) = \gamma(s)$ et $\gamma_j(t) = \gamma(t)$, comme γ est injective, $s = t$.

– Sinon $\gamma_i(s)$, par exemple, est différent de $\gamma(s)$. Par conséquent $\gamma_i(s)$ et donc $\gamma_j(t)$ appartient à $U_i \cup V_i$.

Or $\gamma_j(t)$ appartient à $U_j \cup V_j \cup \gamma([s_j; s_{j+1}])$. Mais si $i \neq j$, les deux ensembles $(U_i \cup V_i) \cap (U_j \cup V_j)$ et $(U_i \cup V_i) \cap \gamma([s_j; s_{j+1}])$ sont vides, ce qui n'est pas le cas ici. Par conséquent $i = j$. Nous avons donc démontré que $\gamma_i(s) = \gamma_i(t)$. Or γ_i est injective. Par conséquent $s = t$. D'où l'injectivité de l'application $\tilde{\gamma}$. ■

La preuve de la proposition 3.1 est donc terminée dans le cas où l'on suppose que les points périodiques de f appartenant à la courbe γ initiale sont des points fixes.

Supposons, à présent, que $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ ne sont plus des points fixes mais des points périodiques de période m de l'application f . En revanche $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des points fixes pour l'application f^m .

Considérons $p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $f(x_1) = x_p$ puis l'arc $\gamma([s_1; s_p])$ contenant $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{p-1}$. L'ensemble $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est alors la réunion des $f^i(\gamma([s_1; s_p]))$, $i \in \{0, \dots, m-1\}$. De plus, l'application f^m préserve l'orientation de la courbe γ , et $\gamma(s_1)$ et $\gamma(s_p)$ sont des points fixes de f^m , par conséquent $f^m(\gamma([s_1; s_p])) = \gamma([s_1; s_p])$.

Considérons alors W un voisinage de $\gamma([\alpha_1; \beta_{p-1}])$ dont l'intersection avec $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est incluse dans $\gamma([s_1; s_p]$, qui ne contient pas x sur son adhérence et tel que $W, \dots, f^{m-1}(W)$ sont deux à deux disjoints et contenus dans U .

Considérons enfin l'application Φ définie sur $\text{Diff}_\omega^1(M)$ par :

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Diff}_\omega^1(M) &\longrightarrow \text{Diff}_\omega^1(M) \\ h &\longmapsto h \circ f^{1-m} \end{aligned}$$

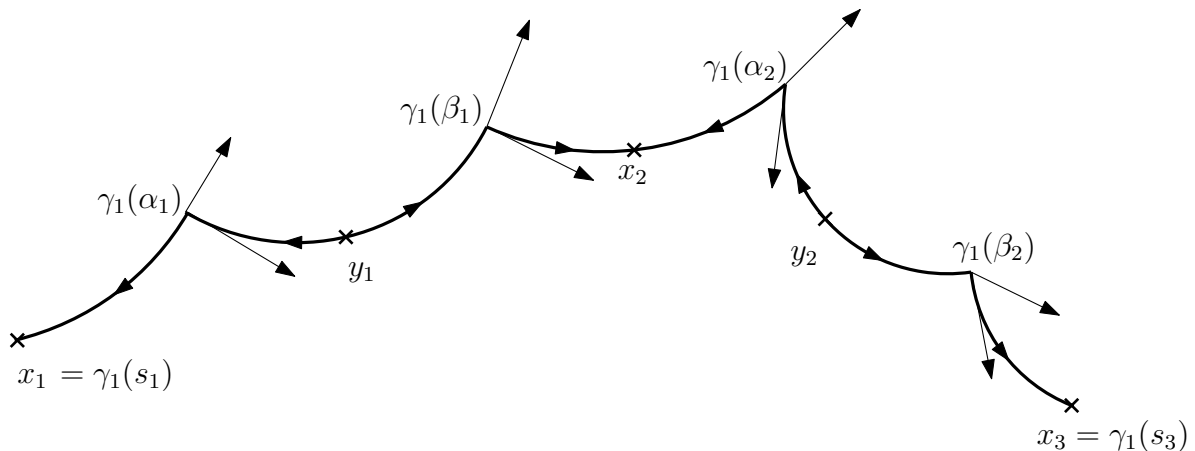
C'est une application continue pour la C^1 topologie forte de Whitney et $\Phi(f^m) = f$. Soit donc \mathcal{V} un voisinage de f^m tel que $\Phi(\mathcal{V})$ est inclus dans le voisinage \mathcal{U} de f .

Travaillons avec f^m . Les points $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ sont des points fixes hyperboliques de f^m et pour tout entier i appartenant à $\{1, \dots, p-1\}$, on a les inclusions suivantes :

$$\gamma([s_i; t_i]) \subseteq W^s(x_i, f^m) \cap W^u(y_i, f^m) \text{ et } \gamma([t_i; s_{i+1}]) \subseteq W^s(x_{i+1}, f^m) \cap W^u(y_i, f^m).$$

Comme ci-dessus, on perturbe au voisinage des $\gamma(\alpha_i)$ et des $\gamma(\beta_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, p-1\}$. On obtient ainsi une application h dans \mathcal{V} qui coïncide avec f^m hors de W et un arc continue γ_1 définie sur $[s_1; s_p]$ tels que :

1. $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{p-1}$ sont des points fixes hyperboliques de h tels que $x_i = \gamma_1(s_i)$ et $y_i = \gamma_1(t_i)$,
2. $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}, \forall t \in [\alpha_i; \beta_i], \gamma_1(t) = h \circ f^{-m}(\gamma(t))$,
3. $\gamma_1([s_1; \alpha_1])$ et $\gamma_1([\beta_{p-1}; s_p])$ sont stables par h et respectivement inclus dans $W^s(x_1, h)$ est inclus dans $W^s(x_p, h)$,
 - pour tout $i \in \{1, \dots, p-1\}, \gamma_1([\alpha_i; \beta_i])$ est inclus dans $W^u(x_i, h)$ et stable par h ,
 - pour tout $i \in \{1, \dots, p-2\}, \gamma_1([\beta_i; \alpha_{i+1}])$ est inclus dans $W^s(x_{i+1}, h)$ et stable par h^{-1} .
4. de plus $(\gamma_1)|_{[s_1; \alpha_1]}, (\gamma_1)|_{[\beta_{p-1}; s_p]}, (\gamma_1)|_{[\alpha_i; \beta_i]}$ et $(\gamma_1)|_{[\beta_i; \alpha_{i+1}]}$ sont des arcs C^1 qui se rencontrent de façon transverse selon le schéma ci-dessous :



Considérons alors l'application g définie par :

$$g = \Phi(h) = h \circ f^{1-m}.$$

LEMME 3.13. —

- L'application g coïncide avec f hors de $f^{m-1}(W)$ et donc hors de U .
- L'application g^m coïncide avec h sur $\gamma_1([s_1; s_p])$.

Preuve . —

- Soit x n'appartenant pas à $f^{m-1}(W)$. Le point $f^{1-m}(x)$ n'appartient pas donc pas à W . Or h coïncide avec f^m hors de W . Par conséquent :

$$g(x) = h \circ f^{1-m}(x) = f^m \circ f^{1-m}(x) = f(x).$$

- Soit x appartenant à $\gamma_1([s_1; s_p])$. Ou x appartient à W , ou x appartient à $\gamma([s_1; s_p])$. Dans les deux cas, le point x n'appartient pas à $f^{1-m}(W)$. D'après ce qui précède, on obtient que

$$g(x) = f(x).$$

De plus $g(x)$ appartient à $f(\gamma([s_1; s_p]) \cup W)$. Ce qui permet de montrer par récurrence que pour tout $k \in \{0; \dots; m-1\}$, $g^k(x) = f^k(x)$ appartient à $f^k(\gamma([s_1; s_p]) \cup W)$. Par conséquent, $g^{m-1}(x) = f^{m-1}(x)$ et

$$g^m(x) = h \circ f^{1-m}(f^{m-1}(x)) = h(x).$$

■

Ce qui permet d'écrire grâce aux assertions énoncées ci-dessus que :

1. $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{p-1}$ sont des points m périodiques hyperboliques de g ,
2. $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}, \forall t \in [\alpha_i; \beta_i], \gamma_1(t) = g^m \circ f^{-m}(\gamma(t))$,
3. — $\gamma_1([s_1; \alpha_1])$ et $\gamma_1([\beta_{p-1}; s_p])$ sont stables par g^m et respectivement inclus dans $W^s(x_1, g)$ est inclus dans $W^s(x_p, h)$,
 - pour tout $i \in \{1, \dots, p-1\}$, $\gamma_1([\alpha_i; \beta_i])$ est inclus dans $W^u(x_i, g)$ et stable par g^m ,
 - pour tout $i \in \{1, \dots, p-2\}$, $\gamma_1([\beta_i; \alpha_{i+1}])$ est inclus dans $W^s(x_{i+1}, g)$ et stable par g^{-m} .

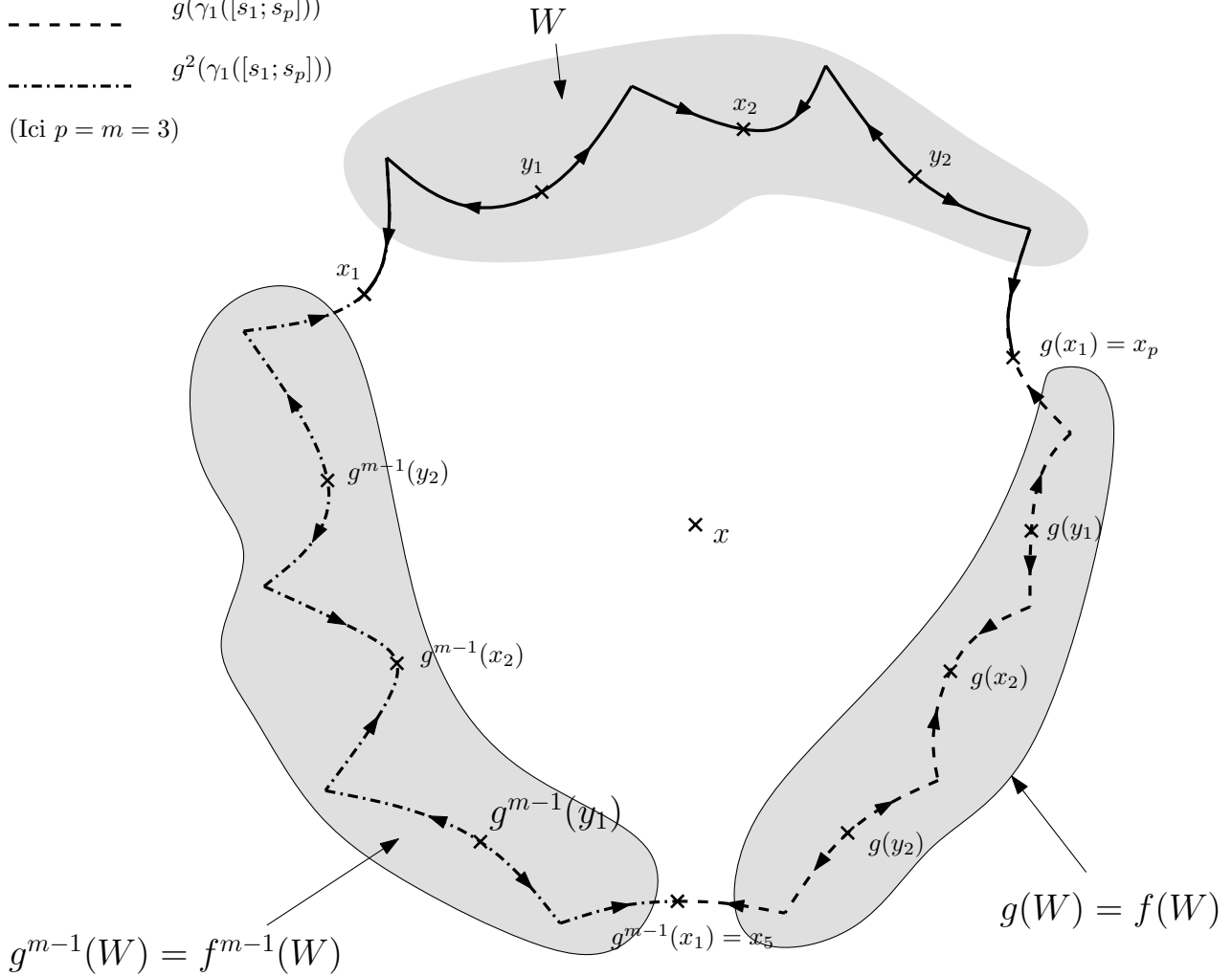
Il suffit alors de considérer la courbe $\tilde{\gamma}$ définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : \mathbb{T}^1 &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto g^i(\gamma_1(s)) \end{aligned}$$

où le point s est défini de la façon suivante : soit $t \in \mathbb{T}^1$, il existe $i \in \{0, \dots, m-1\}$ tel que $\gamma(t)$ appartient à $f^i(\gamma([s_1; s_p])$, posons $s = \gamma^{-1} \circ h^{-i} \circ \gamma(t)$ qui est un point qui appartient à $[s_1; s_p]$.

Voici alors le dessin que l'on obtient :

- $\gamma_1([s_1; s_p])$
 - - - $g(\gamma_1([s_1; s_p]))$
 - · - · - $g^2(\gamma_1([s_1; s_p]))$
- (Ici $p = m = 3$)



Soit $t \in \mathbb{T}^1$ et $i \in \{0, \dots, m-1\}$ tel que $\gamma(t)$ appartient à $f^i(\gamma([s_1; s_p])$. On a :

$$\gamma(t) = f^i(\gamma(s)) \text{ et } \tilde{\gamma}(t) = g^i(\gamma_1(s)),$$

où $s = \gamma^{-1} \circ h^{-i} \circ \gamma(t)$. Ce qui démontre que la courbe $\tilde{\gamma}$ dépend continuellement de l'application g pour la topologie de la convergence uniforme utilisée dans le premier paragraphe. Par conséquent si g est suffisamment proche de f , le point x appartient à $\text{int}_U(\tilde{\gamma})$. Ce qui achève de démontrer que g et x vérifie la propriété Γ relativement à U .

□

3.2 Second résultat de perturbation à propos de la propriété Γ

PROPOSITION 3.14. — Soit f un difféomorphisme symplectique de M , $k \in \mathbb{N}^*$ et x un point périodique elliptique non dégénéré de période k pour h .

Soit U un voisinage de x , homéomorphe à \mathbb{R}^2 , relativement compact et tel que f et x vérifient la propriété Γ relativement à U .

Pour tout voisinage V de x il existe un voisinage \mathcal{V} de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ tel que pour tout $g \in \mathcal{V}$ il existe $y \in M$ un point périodique elliptique non dégénéré de période k de g appartenant à V tel que g et y vérifient la propriété Γ relativement à U .

Démonstration. — La preuve de cette proposition repose sur les résultats exposés dans l'appendice II de ce chapitre.

L'application f et le point x vérifient la propriété Γ relativement à U . Soit donc $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow U$ une courbe fermée simple, $2n$ points $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ appartenant à M et m un entier strictement positif tels que :

1. x appartient à $\text{int}_U(\gamma)$.
2. $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des points m -périodiques hyperboliques pour f .
3. $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est la concaténation d'arcs C^1 , $\gamma_i^s :]\beta_{i-1}; \alpha_i[\rightarrow M$ et $\gamma_i^u :]\alpha_i; \beta_i[\rightarrow M$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tels que :
 - Les points x_i et y_i appartiennent respectivement à $\gamma_i^s(] \beta_{i-1}; \alpha_i [)$ et à $\gamma_i^u(] \alpha_i; \beta_i [)$,
 - les images des arcs γ_i^s et γ_i^u sont respectivement incluses dans $W^s(x_i, f)$ et $W^u(y_i, f)$.
4. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les vecteurs $(\gamma_i^s)'(\alpha_i)$ et $(\gamma_i^u)'(\alpha_i)$ d'une part et les vecteurs $(\gamma_i^u)'(\beta_i)$ et $(\gamma_{i+1}^s)'(\beta_i)$ d'autre part sont non colinéaires (et donc non nuls).
5. De plus, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\gamma_i^s(] \beta_{i-1}; \alpha_i [)$ et $\gamma_i^u(] \alpha_i; \beta_i [)$ sont respectivement stables par f^{2m} et f^{-2m} .

Soit $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, considérons s_i dans $] \beta_{i-1}; \alpha_i [$ et t_i dans $] \alpha_i; \beta_i [$ tels que $x_i = \gamma_i^s(s_i)$ et $y_i = \gamma_i^u(t_i)$. Fixons V un voisinage de x .

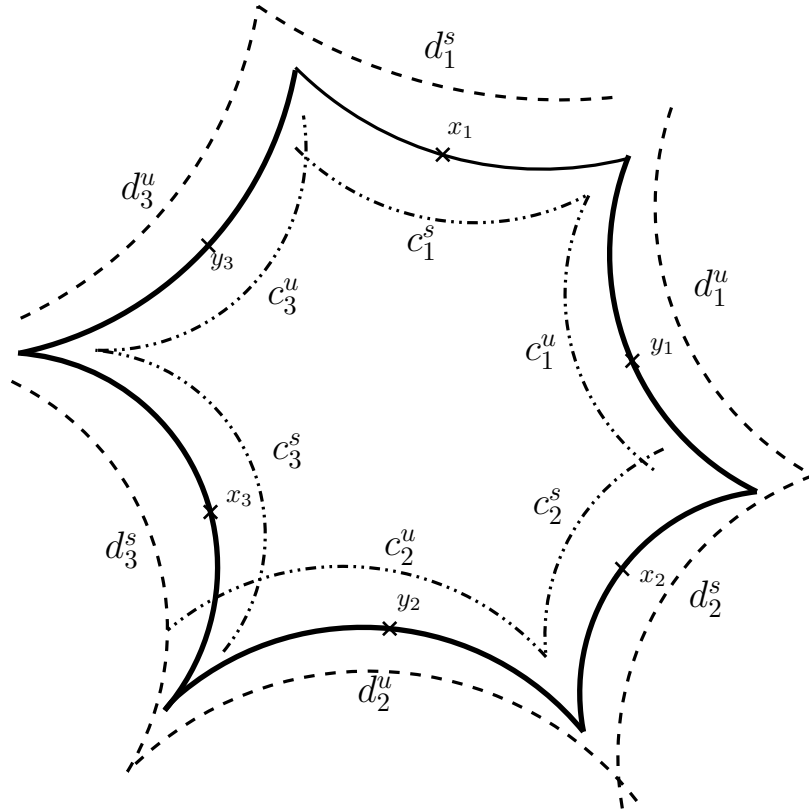
Soit $\varepsilon > 0$ donné par la proposition 1.3 tel que si $\delta : \mathbb{T}^1 \rightarrow U$ une courbe fermée simple et y un point de U vérifient $d(\gamma, \delta) < \varepsilon$ et $d(x, y) < \varepsilon$ alors y appartient à $\text{int}_U(\delta)$.

D'après la proposition 4.5 démontrée dans l'appendice 1, si ε est suffisamment petit, il existe un voisinage \mathcal{U} de f tel que si une application g appartient à ce voisinage, elle possède un unique point m -périodique à une distance inférieure ou égale à ε de chacun des points $x, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.

On peut en outre supposer que la boule de centre x de rayon ε est incluse dans V .

Les hypothèses de la proposition 4.16 démontrée dans l'appendice II sont vérifiées pour chaque couple d'arcs (γ_i^s, γ_i^u) et $(\gamma_i^u, \gamma_{i+1}^s)$. Cette proposition nous donne alors un voisinage \mathcal{V} inclus dans \mathcal{U} associé à cette constante ε et qui convient pour chacun de ces couples d'arcs.

Vérifions que ce voisinage \mathcal{V} convient. Soit g une application appartenant à \mathcal{V} et i appartenant à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe deux couples d'arcs, (c_i^s, c_i^u) et (d_i^u, d_{i+1}^s) , associées respectivement à (γ_i^s, γ_i^u) et $(\gamma_i^u, \gamma_{i+1}^s)$.



Les points $d_i^s(s_i)$, $c_i^s(s_i)$, $c_i^u(t_i)$ et $d_i^u(t_i)$ sont des points m -périodiques hyperboliques de g . Les deux premiers sont à une distance inférieure à ε de x_i tandis que les deux derniers sont à une distance inférieure à ε de y_i . Par unicité des points m -périodiques contenus dans les boules de centre x_i ou y_i de rayon ε , on en déduit que :

$$\begin{aligned} c_i^s(s_i) &= d_i^s(s_i), \\ c_i^u(t_i) &= d_i^u(t_i). \end{aligned}$$

De plus d'après la remarque qui suit la preuve de la proposition 4.16, nous pouvons supposer que :

$$\begin{aligned} (c_i^s)'(s_i) &= (d_i^s)'(s_i), \\ (c_i^u)'(t_i) &= (d_i^u)'(t_i). \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_i^s : [\beta_{i-1}; \alpha_i] &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \begin{cases} d_i^s(t) & \text{si } t \in [\beta_{i-1}; s_i] \\ c_i^s(t) & \text{si } t \in [s_i; \alpha_i] \end{cases} \\ \\ \tilde{\gamma}_i^u : [\alpha_i; \beta_i] &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \begin{cases} c_i^u(t) & \text{si } t \in [\alpha_i; t_i] \\ d_i^u(t) & \text{si } t \in [t_i; \beta_i] \end{cases} \end{aligned}$$

Les applications $\tilde{\gamma}_i^s$ et $\tilde{\gamma}_i^u$ sont des arcs de classe C^1 dont les images sont respectivement contenus dans $W^s(\tilde{\gamma}(s_i), g)$ et dans $W^u(\tilde{\gamma}(t_i), g)$.

L'image de $\tilde{\gamma}_i^s$ est stable par g^{2m} . En effet d'après la proposition 4.11 démontrée dans l'appendice II, $c_i^s([s_i; \alpha_i])$ et $d_i^s([\beta_{i-1}; s_i])$ sont stables par g^{2m} . De même, l'image de $\tilde{\gamma}_i^u$ est stable par g^{-2m} .

Considérons alors $\tilde{\gamma}$ définie comme étant la concaténation des arcs $\tilde{\gamma}_i^s$ et $\tilde{\gamma}_i^u$ puis y le point périodique elliptique de période k se trouvant à une distance strictement inférieure à ε de x . Par construction de $\tilde{\gamma}$, $d(\tilde{\gamma}, \gamma)$ est strictement inférieur à ε , ce qui d'après le choix de ε , implique que y appartient à $\text{int}_U(\tilde{\gamma})$. Le difféomorphisme g et le point y vérifient donc la propriété Γ relativement à U . \square

3.3 Encore un G_δ dense de l'ensemble des difféomorphismes symplectiques de M

PROPOSITION 3.15. — Il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$, noté $\mathcal{G}_\Gamma(M)$, tel que si $f \in \mathcal{G}_\Gamma(M)$ alors :

- tous les points périodiques de f sont non dégénérés,
- l'application f vérifie la propriété Γ avec tous ses points périodiques elliptiques.

Démonstration. — Rappelons l'existence d'un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$, noté $\mathcal{G}_d(M)$, tel que si $f \in \mathcal{G}_d(M)$ alors tous ses points périodiques sont non dégénérés. C'est dans cet ensemble que nous allons travailler.

Fixons $(U_n, K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de couples de sous ensembles de M tels que :

- la famille $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de voisinages ouverts de M homéomorphes à \mathbb{R}^2 et relativement compacts,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est un compact de M ,
- pour tout $x \in M$ tout voisinage U de x , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in K_n \subseteq U_n \subseteq U$.

Soit $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$. Considérons la propriété suivante :

$\mathcal{P}_{n,k}(f)$: si $x \in K_n$ est un point périodique elliptique de période k pour f alors f et x vérifient la propriété Γ .

Puis posons :

$$A_{n,k} = \{f \in \text{Diff}_\omega^1(M) \mid \mathcal{P}_{n,k}(f) \text{ est vraie} \}.$$

Nous allons démontrer que :

1. pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $A_{n,k}$ est dense dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$,
2. pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $A_{n,k} \cap \mathcal{G}_d(M)$ est un ouvert de $\mathcal{G}_d(M)$.
3. si un élément f de $\mathcal{G}_d(M)$ appartient à l'intersection de tous les $A_{n,k}$, $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il vérifie avec tous ses points périodiques elliptiques la propriété Γ .

On pose alors :

$$\mathcal{G}_\Gamma(M) = \bigcap_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} (A_{n,k} \cap \mathcal{G}_d(M)).$$

On ne peut directement conclure que c'est un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ car $A_{n,k}$ n'est pas un ouvert de $\text{Diff}_\omega^1(M)$. En revanche c'est un ouvert de $\mathcal{G}_d(M)$. Il existe donc $\mathcal{O}_{n,k}$ un ouvert de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ dont l'intersection avec $\mathcal{G}_d(M)$ coïncide avec $A_{n,k} \cap \mathcal{G}_d(M)$. Cet ouvert $\mathcal{O}_{n,k}$ est dense puisqu'il contient $A_{n,k}$ qui est une partie dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$. On peut donc conclure que $\mathcal{G}_\Gamma(M) = \bigcap_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} (\mathcal{O}_{n,k} \cap \mathcal{G}_d(M))$ est un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$.

1. Soit $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $A_{n,k}$ est dense dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$.

Soit \mathcal{U} un ouvert de $\text{Diff}_\omega^1(M)$. L'intersection de cet ouvert et de $\mathcal{G}_d(M)$ est non vide car $\mathcal{G}_d(M)$ est une partie dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$. Soit donc f appartenant à $\mathcal{U} \cap \mathcal{G}_d(M)$. Nous allons perturber f à l'aide de la proposition 3.1 de façon à construire une application g qui appartient à la fois à \mathcal{U} et à $A_{n,k}$.

Tous les points périodiques de f étant non dégénérés, l'ensemble des points périodiques de période k est un ensemble de points isolés. Or l'ensemble K_n est compact. L'ensemble des points périodiques de période k de f est donc fini, a fortiori l'ensemble de ses points périodiques elliptiques.

Si l'application f ne possède pas de points k -périodiques elliptiques dans K , elle appartient à $A_{n,k}$. L'intersection de $\mathcal{U} \cap A_{n,k}$ est donc non vide.

Sinon on considère x_1, \dots, x_l les points périodiques elliptiques de f appartenant à K_n . Considérons V_1, \dots, V_l des voisinages respectifs de x_1, \dots, x_l , deux à deux disjoints inclus dans U , et qui ne contiennent pas de points périodiques de période k de f autre que x_1, \dots, x_l . Appliquons l fois la proposition 3.1.

Une première fois au voisinage de x_1 : il existe g_1 dans \mathcal{U} tel que :

- le point x_1 est un point périodique elliptique de g_1 de période k ,
- g_1 et x_1 vérifient la propriété Γ relativement à V_1 ,
- l'application g_1 coïncide avec f hors de V_1 .

Une second fois au voisinage de x_2 : comme g_1 coïncide avec f hors de V_1 , le point x_2 est un point périodique elliptique non dégénéré de période k de g_1 . Il existe donc g_2 dans \mathcal{U} tel que :

- le point x_2 est un point périodique elliptique de g_2 de période k ,
- g_2 et x_2 vérifient la propriété Γ relativement à V_2 ,
- l'application g_2 coïncide avec g_1 hors de V_2 .

A ce stade, on a trouvé une application $g_2 \in \mathcal{U}$ dont x_1 et x_2 sont deux points périodiques elliptiques de période k avec lesquels elle vérifie la propriété Γ . De plus g_2 coïncide avec f hors de $V_1 \cup V_2$.

On continue de la sorte jusqu'à x_l . On obtient ainsi une application $g_l \in \mathcal{U}$ telle que :

- les points x_1, \dots, x_l sont des points périodiques elliptiques de g_l ,
- pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$, g_l et x_i vérifient avec la propriété Γ relativement à V_i et donc relativement à U_n ,
- l'application g_l coïncide avec l'application f hors de $V_1 \cup \dots \cup V_l$.

Cette application g_l ne possède pas de point périodique elliptique de période k dans $K_n \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_l)$ car g_l coïncide avec f sur cet ensemble dont aucun des points n'est k -périodique elliptique pour f .

De plus, d'après la proposition 4.5, chaque x_i étant un point périodique de période k non dégénéré de f , si chaque V_i est un voisinage suffisamment petit de x_i et si g_l est proche de f alors g_l ne possède dans V_i aucun point périodique de période k autre que x_i . L'application g_l vérifie donc avec tous ses points k périodiques elliptiques appartenant à K_n la propriété Γ relativement à U_n . Par conséquent, g_l appartient à $A_{n,k}$. Or par construction g_l appartient à \mathcal{U} . L'intersection de \mathcal{U} et de $A_{n,k}$ est non vide.

Dans les deux cas nous avons démontré que $A_{n,k}$ est dense dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$.

2. Soit $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $A_{n,k} \cap \mathcal{G}_d(M)$ est un ouvert de $\mathcal{G}_d(M)$.

Pour démontrer que $A_{n,k} \cap \mathcal{G}_d(M)$ est un ouvert de $\mathcal{G}_d(M)$, nous allons vérifier qu'il est voisinage de chacun de ses points dans $\mathcal{G}_d(M)$.

Soit $f \in A_{n,k} \cap \mathcal{G}_d(M)$.

Tous les points périodiques de f étant non dégénérés, d'après le corollaire 4.6 de l'appendice I, il existe $l \in \mathbb{N}$, O un ouvert de M contenant K_n et \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ tels que f possède exactement l points périodiques elliptiques de période k dans K_n et toute application de \mathcal{U} possède exactement l points k -périodiques elliptiques dans O .

Si $l = 0$, le voisinage \mathcal{U} est inclus dans $A_{n,k}$.

Si $l > 0$, nous allons travailler au voisinage de chacun des points k -périodiques elliptiques de f appartenant à K_n . Notons x_1, \dots, x_l ces points. Soit V_1, \dots, V_l des voisinages respectivement de x_1, \dots, x_l deux à deux disjoints inclus dans l'ouvert O . Appliquons la proposition 3.14 de x_1, \dots, x_l : il existe un voisinage \mathcal{V} de f inclus dans \mathcal{U} tel que si $h \in \mathcal{V}$, il existe $x_1(h), \dots, x_l(h)$, l points k -périodiques elliptiques de h respectivement inclus dans V_1, \dots, V_l , tels que pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$, le point $x_i(h)$ appartienne à V_i et tels que h vérifie avec chaque $x_i(h)$ la propriété Γ relativement à U_n .

Le voisinage \mathcal{V} est alors inclus dans $A_{n,k}$. En effet si un difféomorphisme symplectique h appartient à \mathcal{V} , il possède exactement l points périodiques dans O . Or il en possède déjà un dans chacun des V_i , $i \in \{1, \dots, l\}$, qui sont deux à deux disjoints et inclus dans O . Et il vérifie avec chacun deux la propriété Γ relativement à U_n . Par conséquent l'application h vérifie la propriété Γ relativement à U_n avec tous ses points k périodiques contenus dans K_n . Le voisinage \mathcal{V} de f est donc inclus dans $A_{n,k}$.

Dans les deux cas, nous avons donc trouvé un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ inclus dans $A_{n,k}$. Ce qui signifie que $A_{n,k} \cap \mathcal{G}_d(M)$ contient l'intersection de ce voisinage avec $\mathcal{G}_d(M)$. D'où le fait que $A_{n,k} \cap \mathcal{G}_d(M)$ est un ouvert de $\mathcal{G}_d(M)$.

3. Si f appartient à l'intersection des $A_{n,k}$, $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, et si x est un point périodique elliptique non dégénéré alors f et x vérifient la propriété Γ .

Soit $f \in \bigcap_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} (A_{n,k} \cap \mathcal{G}_d(M))$.

Comme f appartient à $\mathcal{G}_d(M)$, tous ses points périodiques sont non dégénérés.

Soit x un point périodique elliptique de f et U un voisinage de x . Soit k_0 la période de x . Par construction de la famille $(U_n, K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe un entier n_0 tel que $x \in K_{n_0} \subseteq U_{n_0} \subseteq U$. Or l'application f appartient à $A_{n_0 k_0}$. Par conséquent, f et x vérifient la propriété Γ relativement à U_{n_0} . Ils vérifient donc la propriété Γ relativement à U et cela pour un voisinage U quelconque. L'application f et son point périodique elliptique x vérifient bien la propriété Γ . \square

4 Conclusion

Faisons la synthèse des résultats démontrés dans ce chapitre puis dans tout ce travail pour conclure...

Nous avons démontré dans la proposition 2.6, que si un difféomorphisme symplectique vérifie avec un point périodique non dégénéré la propriété Γ , il n'existe aucune courbe fermée simple invariante par f dont l'image contient x .

Or nous avons construit dans le paragraphe précédent un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ tel que si f appartient à ce G_δ alors tous ses points périodiques elliptiques sont non dégénérés et il vérifie avec eux la propriété Γ . D'où le résultat suivant :

PROPOSITION 4.1. — *Il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ noté $\mathcal{G}_e(M)$ tel que si $f \in \mathcal{G}_e(M)$ admet une courbe fermée simple invariante γ alors f ne possède pas de point périodique elliptique sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.*

Démonstration. — Il suffit de poser $\mathcal{G}_e(M) = \mathcal{G}_\Gamma(M)$. □

Dans le chapitre 2, nous avons construit un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$, noté $\mathcal{G}_h(M)$, tel que si $f \in \mathcal{G}_h(M)$ admet une courbe fermée simple invariante γ alors f possède au moins un point périodique elliptique sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ (cf. la proposition 3.1). D'où le théorème suivant :

THÉOREME 4.2. — *Soit (M, ω) une surface symplectique. Il existe un G_δ dense de $\text{Diff}_\omega^1(M)$ muni de la C^1 topologie forte de Whitney, noté \mathcal{G} , tel que si un difféomorphisme f appartient à \mathcal{G} alors f n'admet aucune courbe fermée simple invariante.*

Démonstration. — Posons $\mathcal{G} = \mathcal{G}_e(M) \cap \mathcal{G}_h(M)$.

Comme $\text{Diff}_\omega^1(M)$ muni de la C^1 topologie forte de Whitney est un espace de Baire, cet ensemble \mathcal{G} est un G_δ dense.

Démontrons par l'absurde que ses éléments ne possèdent pas de courbe fermée simple invariante. Supposons donc qu'il existe une application f appartenant à \mathcal{G} et qui possède une courbe γ fermée simple et invariante. L'application f ne possède pas de point périodique elliptique sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ car elle appartient à $\mathcal{G}_e(M)$. Mais $f \in \mathcal{G}_h(M)$, elle en possède donc au moins un... Ce qui est absurde. □

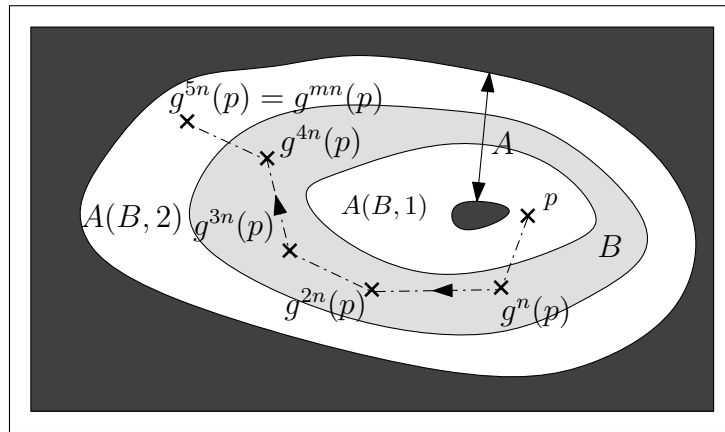
REMARQUE 4.3. — Si de plus la surface M est exacte symplectique, le théorème 4.2 est vérifié aussi dans la catégorie des difféomorphismes exacts symplectiques. En effet, les résultats de généricité (cf. Propositions 1.17 et 1.19) que nous utilisons sont encore vrais dans cette catégorie et les perturbations faites, tant avec le Connecting lemma dans le chapitre 2 que dans ce chapitre, sont toutes à supports dans une réunion finie et disjointe de boules, et ne changent donc pas le caractère exact symplectique du difféomorphisme.

REMARQUE 4.4. — Que devient ce résultat, si on ne s'intéresse plus seulement aux courbes invariantes mais aussi à celles qui sont périodiques ? Le chapitre III, ainsi que le paragraphe du chapitre II où l'on supprime toutes les courbes qui ne contiennent que des points hyperboliques, s'adaptent à ce cas. On obtient alors qu'un difféomorphisme symplectique générique d'une surface ne possède pas de points périodiques sur les courbes qu'il laisse invariantes. Le problème est donc de supprimer les courbes qui ne contiennent pas de points périodiques, autrement dit de regarder ce qu'il se passe dans la deuxième partie du chapitre II où nous avons utilisé le Connecting lemma.

Il n'est pas très difficile d'adapter le lemme 2.5 et ce qui suit lorsque l'on considère une application f et une courbe γ telles que :

1. $f^n(\gamma(\mathbb{T}^1)) = \gamma(\mathbb{T}^1)$, pour un entier n strictement plus grand que 1,
2. $\gamma(\mathbb{T}^1), \dots, f^{n-1}(\gamma(\mathbb{T}^1))$ sont deux à deux disjoints.

En effet, appliquons ce lemme à la courbe γ et à l'application f^n , en prenant soin de perturber f^n sur un voisinage A de la courbe suffisamment petit pour que $A, \dots, f^{n-1}(A)$ soient disjoints. On trouve alors une application h proche de f^n pour laquelle il existe une orbite qui rejoint les deux composantes connexes de $A \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ sans quitter A . On se ramène ensuite à une application proche de f en considérant $g = f^{1-n} \circ h$. Comme les ensembles $A, \dots, f^{n-1}(A)$ sont disjoints, l'application g^n coïncide avec h sur A . Voici le dessin que l'on obtient, lorsque l'on considère un voisinage B de $\gamma(\mathbb{T}^1)$ homéomorphe à un anneau, inclus dans A et tel que $B \prec A$, :



Ceci permet de démontrer que si l'application g admet une courbe périodique de période n dans ce voisinage B , elle admet nécessairement des points périodiques sur l'image de cette courbe. Avec les techniques utilisées dans la suite du paragraphe 2.2 du chapitre III, on obtient qu'un difféomorphisme symplectique C^1 -générique, s'il laisse invariante une union finie de courbes fermées simples disjointes, admet nécessairement des points périodiques sur ces courbes.

Le cas où les courbes considérées ne sont plus disjointes mais se rencontrent en un nombre fini de points, est également traitable, puisque dans ce cas, ces courbes contiennent des points périodiques. Or les courbes périodiques contenant au moins un point périodique ont déjà été éliminées. Il s'agit alors de traiter le cas où leur intersection contient un ensemble infini. Ce cas n'est pas traité dans ce travail...

Appendice I : Points périodiques et perturbation

PROPOSITION 4.5. — Soit (M, ω) une surface symplectique. Soit $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et x un point périodique non dégénéré de période k de f .

1. Il existe \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ et U un voisinage de x dans M , tel que tout g appartenant à \mathcal{U} possède un unique point périodique de période k dans U . De plus l'application $g \in \mathcal{U} \mapsto x_g$ est continue.
2. De plus si x est un point périodique hyperbolique [respectivement elliptique] il existe \mathcal{V} un voisinage de f tel que si g appartient à \mathcal{V} alors x_g est hyperbolique [respectivement elliptique].

Démonstration. — La proposition 1.1.4 de [Ka95], nous donne la première assertion de la proposition.

Pour démontrer la deuxième assertion, travaillons en coordonnées locales au voisinage de p . Notons S^1 l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit donc g appartenant à \mathcal{U} et x_g le point périodique de période k de g contenu dans U . Comme g est un difféomorphisme symplectique, les valeurs propres de l'endomorphisme $Dg^k(x_g)$ appartiennent à $S^1 \cup \mathbb{R}$. Mais si $Dg^k(x_g)$ est suffisamment proche de $Df^k(x)$, ses valeurs propres sont proches de celles de $Df^k(x)$. Or les valeurs propres de $Df^k(x)$ sont différentes de 1 et -1 . Par conséquent, si les valeurs propres de $Df^k(x)$ appartiennent à \mathbb{R} [respectivement à S^1], les valeurs propres de $Dg^k(x_g)$ appartiennent aussi à \mathbb{R} [respectivement à S^1]. Ce qui signifie que si x est hyperbolique, x_g l'est aussi, et que si x est elliptique non dégénéré, x_g est elliptique. Or pour que $Dg^k(x_g)$ et $Df^k(x)$ soient proches, il suffit que g appartienne à un voisinage suffisamment petit de f . D'où le résultat souhaité. \square

COROLLAIRE 4.6. — Soit (M, ω) une surface symplectique. Soit $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et K un compact de M . Si tous les points périodiques elliptiques de période k de f appartenant à K sont non dégénérés, alors :

- l'ensemble des points périodiques elliptiques de période k de f contenus dans K est fini,
- il existe O un ouvert contenant K et \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ tel que si g appartient à \mathcal{U} alors le nombre de points périodiques elliptiques [respectivement hyperboliques] de période k de g contenus dans l'ouvert O est égal au nombre de points périodiques elliptiques [respectivement hyperboliques] de période k de f contenus dans K .

Démonstration. — D'après la proposition 1.7 du chapitre 2, un point périodique de période k non dégénéré est isolé parmi les points périodiques de période k . Or tous les points de période k appartenant à l'ensemble K sont non dégénérés. L'ensemble de ces points est donc un ensemble de points isolés. Par compacité de K , on en déduit que c'est un ensemble fini.

Soit x_1, \dots, x_l les points périodiques de période k de f contenus dans K . Appliquons la proposition précédente au voisinage de chacun de ces points : il existe \mathcal{V}_1 un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ ainsi que des ouverts deux à deux disjoints V_1, \dots, V_l contenant respectivement x_1, \dots, x_l , tels que toute application $g \in \mathcal{V}_1$ possède dans chaque V_i un unique point k périodique elliptique si x_i est elliptique, hyperbolique si x_i est hyperbolique.

Considérons l'ensemble $F = K \setminus (\bigcup_{i=1}^l V_i)$. Sur cet ensemble $f^k(x) \neq x$. Par conséquent l'application ϕ définie par :

$$\begin{aligned} \phi : F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(f^k(x), x) \end{aligned}$$

est strictement positive sur le compact F . Or F est compact, il existe donc un réel ε strictement positif et un ouvert V contenant K tel que $\phi(x) \geq \varepsilon$ quelque soit $x \in F$. Considérons \mathcal{V}_2 l'ensemble des difféomorphismes symplectiques g tels que :

$$g \in \mathcal{V}_2 \iff d(f^k(x), g^k(x)) < \varepsilon/2, \forall x \in M.$$

L'application $f \mapsto f^k$ étant continue pour la topologie C^1 forte de Whitney, l'ensemble \mathcal{V}_2 est un voisinage de $\text{Diff}_\omega^1(M)$. De plus si $g \in \mathcal{V}_2$ et si $x \in V$ alors :

$$d(g^k(x), x) \geq d(f^k(x), x) - d(g^k(x), f^k(x)) > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2 > 0.$$

Donc g n'admet aucun point k -périodique dans V .

Posons $O = V \cup V_1 \cup \dots \cup V_l$ qui est un ouvert qui contient K et $\mathcal{U} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ qui est voisinage de f . Toutes les applications de \mathcal{U} possèdent alors un unique point périodique dans V_i , qui est elliptique, si x_i l'est pour f , et hyperbolique sinon et ne possèdent aucun point k périodique sur $O \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_l)$. Elles possèdent donc sur O exactement le même nombre de points périodiques elliptiques ou hyperboliques de périodes k que f en possède sur K . \square

Appendice II : Arcs transverses – Variétés stables et instables

1) Topologie sur les espaces d'applications C^1 définies sur un intervalle de \mathbb{R}

Soit I un intervalle compact de \mathbb{R}^2 .

• $C^1(I, \mathbb{R}^2)$ désigne l'espace vectoriel des applications de classe C^1 définies sur I à valeurs dans \mathbb{R}^2 . On munit cet espace de la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie pour tout $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ par :

$$\|\gamma\|_\infty = \sup_{t \in I} \{ \|\gamma(t)\|, \|\gamma'(t)\| \}.$$

Cette norme $\| \cdot \|_\infty$ induit sur $C^1(I, \mathbb{R}^2)$ la topologie de la convergence uniforme. De plus $(C^1(I, \mathbb{R}^2), \| \cdot \|_\infty)$ est un espace de Banach.

• Soit (M, d) une surface riemannienne et (U, ϕ) une carte de M où ϕ est un difféomorphisme de U sur \mathbb{R}^2 .

$C^1(I, U)$ désigne l'ensemble des applications de classe C^1 définies sur I à valeurs dans U . On munit cet espace de la topologie induite par la métrique d_ϕ définie pour tout $(\gamma, \delta) \in (C^1(I, \mathbb{R}^2))^2$ par :

$$d_\phi(\gamma, \delta) = \sup_{t \in I} \{ d(\gamma(t), \delta(t)), \|(\phi \circ \gamma)'(t) - (\phi \circ \delta)'(t)\| \}.$$

Considérons l'application Φ définie par :

$$\begin{aligned} \Phi : (C^1(I, U), d_\phi) &\longrightarrow (C^1(I, \mathbb{R}^2), \| \cdot \|_\infty) \\ \gamma &\longmapsto \phi \circ \gamma \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de ϕ , on peut vérifier que Φ est un homéomorphisme.

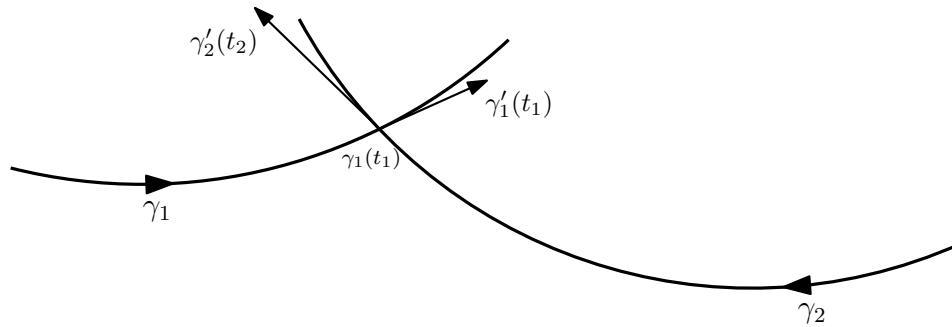
2) Arcs uniquement transverses

Soit (M, d) une surface riemannienne.

DÉFINITION 4.7. — Soit $I = [a; b]$ et $J = [c; d]$ deux intervalles de \mathbb{R} d'intérieur non vide. Soit $\gamma_1 : I \rightarrow M$ et $\gamma_2 : J \rightarrow M$ deux arcs de classe C^1 . S'il existe $t_1 \in]a; b[$ et $t_2 \in]c; d[$ tels que :

- $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$,
- $\gamma_1'(t_1)$ et $\gamma_2'(t_2)$ ne sont pas colinéaires (ce sont donc des vecteurs non nuls),

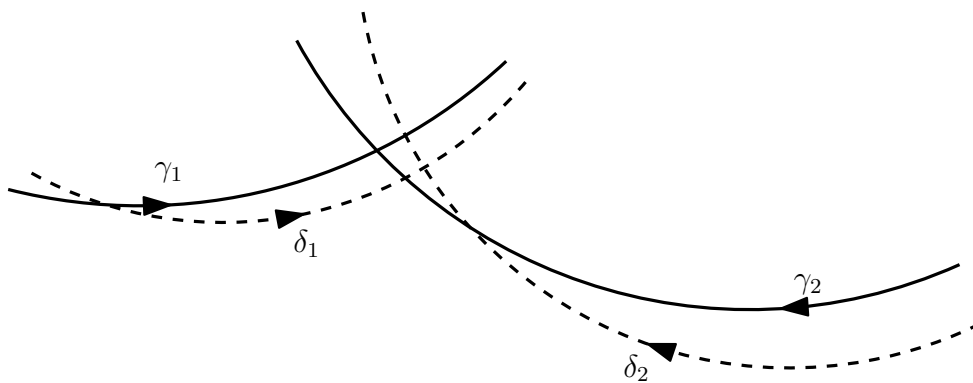
- $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ est le seul point d'intersection de $\gamma_1(I)$ et $\gamma_2(J)$, on dit que $\gamma_1(I)$ et $\gamma_2(J)$ sont *uniquement transverses*. On note $\gamma_1(I) \pitchfork \gamma_2(J)$.



PROPOSITION 4.8. — Soit (U, ϕ) une carte de M où ϕ est un difféomorphisme de U sur \mathbb{R}^2 . Soit I et J deux intervalles compacts d'intérieur non vide, Considérons $\gamma_1 : I \rightarrow M$ et $\gamma_2 : J \rightarrow M$ deux arcs de classe C^1 tels que $\gamma_1(I) \pitchfork \gamma_2(J)$.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous arcs $\delta_1 : I \rightarrow U$ et $\delta_2 : J \rightarrow U$ de classe C^1 vérifiant $d_\phi(\delta_1, \gamma_1) < \varepsilon$ et $d_\phi(\delta_2, \gamma_2) < \varepsilon$ alors $\delta_1(I) \pitchfork \delta_2(J)$.

De plus l'application définie sur un voisinage de (γ_1, γ_2) par $(\delta_1, \delta_2) \mapsto (s, t) / \delta_1(s) = \delta_2(t)$ est continue



Démonstration. — La preuve de ce théorème repose sur le théorème des fonctions implicites.

En utilisant la continuité de l'application Φ définie ci-dessus, on peut se ramener au cas où $M = U = \mathbb{R}^2$ et où l'application ϕ est l'identité de \mathbb{R}^2 .

Soit $a < b$ et $c < d$ tels que $I = [a; b]$ et $J = [c; d]$. Considérons l'application F définie par :

$$F : C^1(I, \mathbb{R}^2) \times C^1(J, \mathbb{R}^2) \times]a; b[\times]c; d[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$((\delta_1, \delta_2) \times (s, t)) \longmapsto \delta_1(s) - \delta_2(t)$$

Les éléments de $C^1(I, \mathbb{R}^2) \times C^1(J, \mathbb{R}^2)$ forment la première variable, les éléments de $]a; b[\times]c; d[$ forment la seconde variable. La différentielle de F selon la seconde variable est notée D_2F .

Vérifions les hypothèses du théorème des fonctions implicites. Il a déjà été remarqué que $C^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $C^1(J, \mathbb{R}^2)$ sont des espaces de Banach. De plus :

- F est de classe C^1 ,

- $F((\gamma_1, \gamma_2), (s_0, t_0)) = 0$ où $(s_0, t_0) \in]a; b[\times]c; d[$ vérifie $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(t_0)$,
- pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,

$$D_2F((\gamma_1, \gamma_2), (s_0, t_0))u = (\gamma'_1(s_0) \cdot u) \vec{i} - (\gamma'_2(t_0) \cdot u) \vec{j}$$

où (\vec{i}, \vec{j}) est la base canonique de \mathbb{R}^2 et (\cdot) est le produit scalaire usuel.

Comme $\gamma'_1(s_0)$ et $\gamma'_2(t_0)$ ne sont pas colinéaires, $D_2F((\gamma_1, \gamma_2), (s_0, t_0))$ est inversible.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 des voisinages respectivement de γ_1 et γ_2 , $I' \subseteq I$ et $J' \subseteq J$ des intervalles ouverts contenant respectivement s_0 et t_0 ainsi qu'une application $g : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \rightarrow I' \times J'$ de classe C^1 tels que :

$$\forall (\delta_1, \delta_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2, \forall (s, t) \in I' \times J', [F((\delta_1, \delta_2)(s, t)) = 0 \Leftrightarrow g(\delta_1, \delta_2) = (s, t)].$$

Remarquons que les deux compacts $\gamma_1(I \setminus I')$ et $\gamma_2(J)$ sont disjoints car $\gamma_1(I)$ et $\gamma_2(J)$ ne se rencontrent qu'en $\gamma_1(s_0)$ qui n'appartient pas à $\gamma_1(I \setminus I')$ puisque s_0 appartient à I' . Par conséquent la distance entre $\gamma_1(I \setminus I')$ et $\gamma_2(J)$ définie par $d(\gamma_1(I \setminus I'), \gamma_2(J)) = \min\{\|\gamma_1(u) - \gamma_2(v)\| \mid u \in I \setminus I', v \in J\}$ est strictement positive. De la même façon, on vérifie que $d(\gamma_1(I), \gamma_2(J \setminus J')) = \min\{\|\gamma_1(u) - \gamma_2(v)\| \mid u \in I, v \in J \setminus J'\}$ est strictement positive. Considérons donc α un réel strictement positif tel que :

1. $\alpha \leq d(\gamma_1(I \setminus I'), \gamma_2(J))$ et $\alpha \leq d(\gamma_1(I), \gamma_2(J \setminus J'))$,

Comme $\gamma'_1(s_0)$ et $\gamma'_2(t_0)$ ne sont pas colinéaires, on peut de plus supposer que :

2. si u et $v \in \mathbb{R}^2$ vérifient $\|u - \gamma'_1(s_0)\| \leq \alpha$ et $\|v - \gamma'_2(t_0)\| \leq \alpha$ alors u et v ne sont pas colinéaires.

Soit $I'' \subseteq I'$ et $J'' \subseteq J'$ deux intervalles ouverts contenant respectivement s_0 et t_0 tels que :

$$\|\gamma'_1(s) - \gamma'_1(s_0)\| < \frac{\alpha}{2} \text{ et } \|\gamma'_2(t) - \gamma'_2(t_0)\| < \frac{\alpha}{2}, \forall (s, t) \in I'' \times J''.$$

Enfin considérons un réel $\varepsilon \in]0; \alpha/2[$ tels que si deux applications $\delta_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\delta_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 vérifient $\|\delta_1 - \gamma_1\|_\infty < \varepsilon$ et $\|\delta_2 - \gamma_2\|_\infty < \varepsilon$ alors

$$(\delta_1, \delta_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \text{ et } g(\delta_1, \delta_2) \in I'' \times J''.$$

Vérifions que ce réel ε ainsi construit convient. Soit $\delta_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\delta_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux arcs de classe C^1 tels que $\|\delta_1 - \gamma_1\|_\infty < \varepsilon$ et $\|\delta_2 - \gamma_2\|_\infty < \varepsilon$, démontrons que $\delta_1(I) \cap \delta_2(J)$. Soit $(s, t) = g(\delta_1, \delta_2)$, alors s appartient à $]a; b[$ et t appartient à $]c; d[$ et :

- $\delta_1(s) = \delta_2(t)$.
- $\|\delta'_1(s) - \gamma'_1(s_0)\| \leq \|\delta'_1(s) - \gamma'_1(s)\| + \|\gamma'_1(s) - \gamma'_1(s_0)\| \leq \varepsilon + \|\gamma'_1(s) - \gamma'_1(s_0)\|$,
or d'une part $s \in I''$ donc $\|\gamma'_1(s) - \gamma'_1(s_0)\| < \alpha/2$, d'autre par $\varepsilon \in]0; \alpha/2[$. Par conséquent :

$$\|\delta'_1(s) - \gamma'_1(s_0)\| < \alpha.$$

De même on vérifie que :

$$\|\delta'_2(t) - \gamma'_2(t_0)\| < \alpha.$$

D'après l'assertion 2. ci-dessus on en déduit que $\delta'_1(s)$ et $\delta'_2(t)$ ne sont pas colinéaires.

- Soit $(u, v) \in I \times J$ tel que $\delta_1(u) = \delta_2(v)$. Si u n'appartient pas à I' , alors :

$$\|\gamma_1(u) - \gamma_2(v)\| < \|\gamma_1(u) - \delta_1(u)\| + \|\delta_2(u) - \gamma_2(v)\| < 2\varepsilon < \alpha$$

ce qui contredit l'assertion 1. ci-dessus. Par conséquent u appartient à I' . De la même façon, on démontre que v appartient à J' . Dans ce cas :

$$(u, v) = g(\delta_1, \delta_2) = (s, t).$$

Ce qui permet de conclure que $\delta_1(I) \cap \delta_2(J) = \{\delta_1(s)\} = \{\delta_2(t)\}$.

□

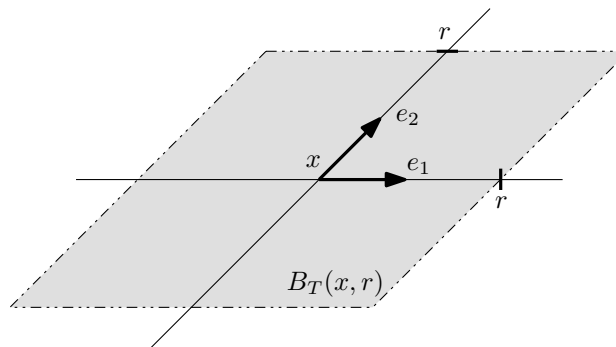
3) Compléments sur les variétés stables et instables

Présentation de résultats déjà connus. Rappelons que nous avons déjà abordé la notion de variétés stables et instables dans le deuxième chapitre, et que nous avons parlé de variété stable et de variété instable transverses. Dans la preuve de la proposition 3.1, il est utile d'être un peu plus précis et de savoir ce que deviennent les variétés stables ou instables, ainsi que leur intersection, lorsqu'on perturbe le difféomorphisme avec lequel on travaille. Pour cela, nous allons nous référer aux résultats démontrés par M.Shub dans le chapitre 5 et dans l'appendice 5.2 de [Sh78] où il donne une preuve du théorème de la variété stable dans le cadre des espaces des Banach en utilisant une "transformation de graphe". On peut aussi consulter [PaMe82] qui présente la preuve du théorème de la variété stable due à M.Irwin.

Tous les énoncés ci-dessous qui concernent les variété stables peuvent s'écrire en remplaçant la notion de variété stable par la notion de variété instable. Pour cela il suffit de changer f en f^{-1} .

Voici ce que l'on peut déduire des énoncés du théorème 5 et du complément 5.2.6 de [Sh78] :

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un plongement de classe C^1 . Supposons que $f(0) = 0$ et que $T = Df(0)$ possède deux valeurs propres $\lambda < 1$ et $\mu > 1$. Soit e_1 et e_2 deux vecteurs de normes 1 de \mathbb{R}^2 tel que $Te_1 = \lambda e_1$ et $Te_2 = \mu e_2$. Considérons sur \mathbb{R}^2 , la norme $\| \cdot \|_T$ définie par $\|u\|_T = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ où α et β sont les deux réels tels que $u = \alpha e_1 + \beta e_2$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, $B_T(x, r)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon r pour la norme $\| \cdot \|_T$.



Il existe \mathcal{U} un voisinage de f dans $C^1(U, \mathbb{R}^2)$, un réel r strictement positif et une application Γ , continue, définie sur \mathcal{U} par :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{U} &\longrightarrow C^1([-r; r], \mathbb{R}^2) \\ g &\longmapsto \gamma_g \end{aligned}$$

telle que si g appartient à \mathcal{U} et si $g(0) = 0$ alors γ_g est un arc qui vérifie

1. $\gamma_g(0) = 0$ et $\gamma'_g(t) \neq 0$ pour tout $t \in [-r; r]$,
2. pour tout $t \in [-r; r]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(\gamma_g(t)) = 0$,
3. pour tout $s \in]0; r]$, $\gamma_g([-s; s]) = \bigcap_{m=0}^{+\infty} g^{-m}(B_T(0, s))$.

De cela, nous pouvons en déduire assez facilement le résultat suivant :

PROPOSITION 4.9. — Soit f un difféomorphisme d'une surface symplectique M , m un entier non nul et p un point périodique hyperbolique de période k de f . Soit U un voisinage de p et ϕ un difféomorphisme de U sur \mathbb{R}^2 .

Il existe \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$, un réel r strictement positif et une application Γ , continue, définie sur \mathcal{U} par :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{U} &\longrightarrow C^1([-r; r], U) \\ g &\longmapsto \gamma_g \end{aligned}$$

telle que si g appartient à \mathcal{U} alors γ_g est un arc qui vérifie :

1. $\gamma_g(0) = q$ est un point périodique de période m de g ,
2. $\gamma'_g(t) \neq 0$ pour tout $t \in [-r; r]$,
3. pour tout $s \in]0; r]$, il existe un voisinage V de p tel que $\gamma_g([-s; s]) = W_V^s(p, g)$.

Démonstration. — Supposons que p est un point fixe de f . S'il ne l'est, on peut s'y ramener en travaillant avec l'application f^m puis en utilisant la continuité de l'application $g \mapsto g^m$.

Par souci de clarté, nous allons traiter le cas où $M = U = \mathbb{R}^2$, où ϕ est l'identité et où $p = 0$. Le cas général se traite selon la méthode. Il suffit de travailler dans un voisinage suffisamment petit de f pour que les applications que nous allons définir au cours de cette preuve aient un sens.

Appliquons la proposition précédente : il existe \mathcal{V} un voisinage de f dans $C^1(U, \mathbb{R}^2)$, un réel r strictement positif et une application Γ , continue, définie sur \mathcal{U}_1 par :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{V} &\longrightarrow C^1([-r; r], U) \\ g &\longmapsto \gamma_g \end{aligned}$$

telle que si g appartient à \mathcal{V} et si $g(0) = 0$ alors γ_g est un arc :

- $\gamma_g(0) = 0$ et $\gamma'_g(t) \neq 0$ pour tout $t \in [-r; r]$,
- pour tout $t \in [-r; r]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(\gamma_g(t)) = 0$,
- pour tout $s \in]0; r]$, $\gamma_g([-s; s]) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} g^{-n}(B_T(0, s))$ où $T = Df(0)$ et $B_T(0, s)$ est un voisinage de 0 définie ci-dessus.

D'après la proposition 4.5 démontrée dans l'appendice I, on peut considérer \mathcal{U}_1 un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ et U_1 un voisinage de p tel que si g appartient à \mathcal{U}_1 , alors g possède un unique point périodique hyperbolique p_g dans U_1 . De plus l'application $g \in \mathcal{U}_1 \rightarrow p_g \in \mathbb{R}^2$ est continue.

Notons τ_g la translation qui envoie p_g sur 0 et posons :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{U}_1 &\longrightarrow C^1(\mathbb{R}^2) \\ g &\longmapsto \tau_g \circ g \circ \tau_g^{-1} \end{aligned}$$

L'application ψ est continue et envoie f sur elle-même. Il existe donc \mathcal{U} un voisinage de f inclus dans \mathcal{U}_1 tel que $\psi(\mathcal{U})$ est inclus dans \mathcal{V} .

Considérons alors l'application Γ définie sur \mathcal{U} par :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{U} &\longrightarrow C^1([-r; r], \mathbb{R}^2) \\ g &\longmapsto \delta_g = \tau_g^{-1} \circ \gamma_{\psi(g)} \end{aligned}$$

L'application Γ est continue. De plus si g appartient à \mathcal{U} , alors $\psi(g)$ appartient à \mathcal{V} et :

$$\psi(g)(0) = \tau_g \circ g \circ \tau_g^{-1}(0) = \tau_g(g(p_g)) = \tau_g(p_g) = 0.$$

Ainsi, $\gamma_{\psi(g)}$ est un arc qui vérifie les trois points énoncés ci-dessus. Ce qui permet de conclure. \square

REMARQUE 4.10. — Pour tout $s \in]0; r]$,

$$W^s(p, f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-nm}(\gamma_f([-s; s])) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-nm}(\gamma_f(]-s; s])).$$

Un résultat sur les arcs inclus dans une variété stable. Reprenons les notations de la proposition précédente. Pour tout $s \in]0; r]$, $\gamma_f([-s; s])$ est stable par f . Ainsi pour tout entier n positif, $f^{-n}(\gamma_f([-s; s]))$ est stable par f^m . Nous avons ainsi obtenu une famille d'arcs C^1 , stables par f^m et donc par f^{2m} inclus dans la variété stable de p . Réciproquement voici quelques résultats concernant les arcs de classe C^1 inclus dans $W^s(p, f)$ stables par f^{2m} .

PROPOSITION 4.11. — Soit f un difféomorphisme d'une surface symplectique M , m un entier strictement positif et p un point m -périodique hyperbolique de f . Soit I un intervalle compact et a un réel appartenant à l'intérieur de I .

Soit $c : I \rightarrow U$ un arc de classe C^1 tel que $c(a) = p$, dont l'image est stable par f^{2m} et incluse dans $W^s(p, f)$.

1. Pour tout intervalle J inclus dans I contenant a dans son intérieur, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $c(I)$ est inclus dans $f^{-nm}(c(J))$.
2. Pour tout voisinage U de p , il existe un voisinage V de p inclus dans U , un intervalle J inclus dans I contenant a dans son intérieur tels que $c(J) = W_V^s(p, f)$.
3. Pour tout $(u, v) \in I$ tel que $u < a < v$, $f^{2m}(c([u; a]))$ est inclus dans $c(]u; a])$ et $f^{2m}(c([a; v]))$ est inclus dans $c([a; v])$.

En particulier pour tout intervalle J inclus dans I contenant a dans son intérieur, $f^{2m}(c(J))$ est inclus dans $c(\text{int}(J))$ où $\text{int}(J)$ est l'intérieur de J .

Démonstration. — Quitte à faire un changement de paramétrage, nous supposons que $a = 0$. Soit u et v deux réels tels que $I = [u; v]$. Comme $f^{2m}(c([u; v]))$ est inclus dans $c([u; v])$, il existe deux suites de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ incluses dans $[u; v]$ tels que :

$$f^{2nk}(c([u; v])) = c([u_n; v_n]).$$

Comme $f^{2m}(c(0)) = c(0)$ et $f^{2m}(c([u_n; v_n])) \subseteq c([u_{n+1}; v_{n+1}])$, on obtient :

$$u_n \leq u_{n+1} < 0 < v_{n+1} \leq v_n.$$

Or $c^{-1} \circ f^{4m} \circ c : [u_n; v_n] \rightarrow [u_{n+1}; v_{n+1}]$ est une application surjective strictement croissante. Donc :

$$c^{-1} \circ f^{4m} \circ c(u_n) = u_{n+2},$$

$$c^{-1} \circ f^{4m} \circ c(v_n) = v_{n+2}.$$

Ce qui permet de démontrer par récurrence que :

$$c^{-1} \circ f^{4nm} \circ c(u) = u_{2n},$$

$$c^{-1} \circ f^{4nm} \circ c(v) = v_{2n}.$$

Comme $c(u)$ et $c(v)$ appartiennent à la variété stable de $p = c(0)$ sous f , on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Soit donc J un intervalle contenu dans I contenant 0 dans son intérieur. Il existe un entier l positif tel que $[u_l; v_l]$ est inclus dans J . Nous obtenons alors :

$$c(I) = f^{-2lm}(c([u_l; v_l])) \subseteq f^{-2lm}(c(J)).$$

Il suffit alors de poser $n = 2l$.

Pour la preuve de la deuxième partie de la proposition, fixons U un voisinage de p . Soit $r > 0$ et $\gamma = \Gamma(f)$ donnés par la proposition précédente. Quitte à réduire U et à prendre r suffisamment petit, on peut supposer que $\gamma([-r; r]) = W_U(p, f)$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $c([u_{n_0}; v_{n_0}])$ est inclus dans U . Si t appartient à $[u_{n_0}; v_{n_0}]$, $f^{2m}(c(t))$ appartient à $c([u_{n_0}; v_{n_0}])$. Par conséquent, la suite $(f^{2nm}(c(t)))_{n \in \mathbb{N}}$ est incluse dans $c([u_{n_0}; v_{n_0}])$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{2nm}(c(t))$ appartient à U . Ce qui implique que :

$$c([u_{n_0}; v_{n_0}]) \subseteq W_U(p, f^2) \subseteq \gamma([-r; r]).$$

Considérons l'application $\gamma^{-1} \circ c : [u_{n_0}; v_{n_0}] \rightarrow [-r; r]$. C'est une application continue, injective donc strictement monotone. Ainsi les réels $\gamma^{-1} \circ c(u_{n_0})$ et $\gamma^{-1} \circ c(v_{n_0})$ sont non nuls et de signes opposés. Il existe donc un réel s strictement positif et un intervalle J inclus dans $[u_{n_0}; v_{n_0}]$ contenant 0 dans son intérieur tels que $c(J) = \gamma([-s; s])$. Ce qui, d'après les propriétés de γ , démontre qu'il existe un voisinage V de p tel que $c(J)$ est la variété stable locale de p sous f dans V .

Pour le troisième point, notons $I = [x; y]$ où x et y sont deux réels tels que $x < a < y$. Considérons l'application $c^{-1} \circ f^{2m} \circ c$ définie sur $[x; y]$. Elle est continue et injective. Elle est donc strictement monotone. Or d'après ce qui précède, il existe un intervalle J tel que $c(J)$ est une variété stable locale de p sous f . Donc $f^m(c(J))$ est inclus dans $c(J)$. Sur cet intervalle $c^{-1} \circ f^{-2m} \circ c$ est la composée de $c^{-1} \circ f^m \circ c$ par elle-même. Ce qui signifie que l'application $c^{-1} \circ f^{2m} \circ c$ est strictement croissante sur J . Elle est donc strictement croissante sur I . Enfin posons pour tout $t \in I$, $\xi(t) = c^{-1} \circ f^{2m} \circ c(t) - t$. cette application continue s'annule seulement en a . De plus $\xi(x) \geq 0$ et $\xi(y) \leq 0$ car $c^{-1} \circ f^{2m} \circ c([x; y])$ est inclus dans $[x; y]$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaire, on obtient que $\xi(t)$ est strictement positif si t appartient à $[x; a[$ et que $\xi(t)$ est strictement négatif si t appartient à $]a; y]$. Soit donc u et v dans I tels que $u < a < v$. Posons $u_1 = c^{-1} \circ f^{2m} \circ c(u)$ et $v_1 = c^{-1} \circ f^{2m} \circ c(v)$. Comme $c^{-1} \circ f^{2m} \circ c$ est strictement croissante et que $c^{-1} \circ f^{2m} \circ c(a) = a$, on en déduit que $u_1 < a < v_1$. Or $\xi(u) = u_1 - u$ est strictement positif et $\xi(v) = v_1 - v$ est strictement négatif. Ce qui implique que $u < u_1 < a < v_1 < v$. Par conséquent :

$$f^{2m}(c([u; a])) \subseteq c([u; a]) \text{ et } f^{-2m}(c([a; v])) \subseteq c([a; v]).$$

□

REMARQUE 4.12. Reprenons les notations de la proposition précédente et de sa preuve :

$$c(I) \subseteq f^{-mn}(\gamma([-r; r])).$$

En effet, considérons V un voisinage de p tel que $\gamma_f([-r/2; r/2])$ est la variété stable locale de p sous f dans V . La proposition 4.11 nous donne alors un intervalle J inclus dans I contenant a dans son intérieur et un entier n positif tels que $c(J)$ est inclus dans $W_V^s(p, f)$ et tels que $c(I)$ est inclus dans $f^{-mn}(c(J))$. Par conséquent, $c(I)$ est inclus dans $f^{-mn}(\gamma_f([-r/2; r/2]))$ qui est lui même contenu dans $f^{-mn}(\gamma_f([-r; r]))$.

Voici un résultat concernant une courbe C^1 , invariante par un difféomorphisme préservant l'orientation de la courbe, résultat que nous utilisons dans la preuve de la proposition 3.1. Si nous plaçons cette proposition ici, c'est parce que sa preuve repose sur la proposition précédente.

En fait, c'est un complément du lemme 3.3 démontré au chapitre 2 qui traite le cas, non pas d'une courbe de classe C^1 , mais seulement d'une courbe continue.

PROPOSITION 4.13. — Soit (M, ω) une surface symplectique et $h \in \text{Diff}_\omega^1(M)$. Soit $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ une courbe fermée simple de classe C^1 telle que $\gamma'(\theta) \neq 0$ quelque soit $\theta \in \mathbb{T}^1$.

Si cette courbe est invariante par h et si h préserve son orientation et possède sur son image des points périodiques qui sont tous hyperboliques, alors $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est la réunion des variétés stables ou instables de ces points périodiques.

Preuve . — Comme nous l'avons déjà vu au cours de la preuve du lemme 3.3 du chapitre 2 :

1. l'application h préservant l'orientation de γ , tous les points périodiques de h appartenant à $\gamma(\mathbb{T}^1)$ ont la même période k où k est un entier strictement positif,
2. or ces points périodiques sont hyperboliques donc non dégénérés. Par compacité de $\gamma(\mathbb{T}^1)$, on en déduit qu'ils sont en nombre fini.

Soit $(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ une famille de points du cercle tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\theta_{i-1} < \theta_i < \theta_{i+1}$ et tels que les $x_i = \gamma(\theta_i)$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les points périodiques de h sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$.

Soit $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous allons utiliser la même démarche que pour la proposition 2.33 du chapitre 1. En effet cette proposition permet d'écrire que :

$$\gamma([\theta_{i-1}; \theta_i]) \subseteq W^s(x_i, h) \text{ ou } \gamma([\theta_{i-1}; \theta_i]) \subseteq W^u(x_i, h),$$

$$\gamma([\theta_i; \theta_{i+1}]) \subseteq W^s(x_i, h) \text{ ou } \gamma([\theta_i; \theta_{i+1}]) \subseteq W^u(x_i, h).$$

De plus h préservant l'orientation de γ , les ensembles $\gamma([\theta_{i-1}; \theta_i])$ et $\gamma([\theta_i; \theta_{i+1}])$ sont stables par h^k et h^{-k} .

En utilisant que γ est une courbe de classe C^1 et que h est un difféomorphisme, nous allons vérifier que :

$$\gamma([\theta_{i-1}; \theta_{i+1}]) \subseteq W^s(x_i, h) \text{ ou } \gamma([\theta_{i-1}; \theta_{i+1}]) \subseteq W^u(x_i, h).$$

Identifions $]\theta_{i-1}; \theta_{i+1}[$ avec un intervalle de \mathbb{R} . Puis travaillons avec un relèvement H de $\gamma^{-1} \circ h \circ \gamma$. L'application H est une application dérivable car la dérivée de γ ne s'annule pas. De plus, le point θ_i étant un point périodique de h , il existe un entier relatif m tel que $H^k(\theta_i) = \theta_i + m$.

Considérons alors l'application définie pour tout $x \in]\theta_{i-1}; \theta_{i+1}[$ par $G(x) = H^k(x) - m - x$. C'est une application dérivable qui s'annule une fois en θ_i et telle que $G'(\theta_i) = (H^k)'(\theta_i) - 1 = (\gamma^{-1} \circ h^k \circ \gamma)'(\theta_i) - 1$. Or θ_i est un point périodique hyperbolique de h , 1 n'est donc pas valeur propre de $Dh^k(\theta_i)$ donc $(\gamma^{-1} \circ h^k \circ \gamma)'(\theta_i)$ est différent de 1, ce qui démontre que $G'(\theta_i)$ est non nul. On en déduit que l'application G est strictement croissante ou strictement décroissante au voisinage de θ_i .

Supposons que G est strictement décroissante sur ce voisinage de θ_i . Comme G ne s'annule qu'en θ_i , on obtient en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\text{si } x \in]\theta_{i-1}; \theta_i[\Rightarrow G(x) > 0,$$

$$\text{si } x \in]\theta_i; \theta_{i+1}[\Rightarrow G(x) < 0.$$

Ainsi si x est plus petit que θ_i , la suite $(\gamma^{-1} \circ h^{nk} \circ \gamma)(x)_{n \in \mathbb{N}}$ (que l'on sait déjà être une suite incluse dans $] \theta_{i-1}; \theta_i [$) est une suite strictement croissante qui converge vers θ_i . De la même façon, on vérifie que si x est plus grand que θ_i , la suite $(\gamma^{-1} \circ h^{nk} \circ \gamma)(x)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante. On obtient ainsi que $\gamma(] \theta_{i-1}; \theta_{i+1} [$) est inclus dans $W^s(x_i, h)$.

Or $\gamma(] \theta_{i-1}; \theta_{i+1} [$) est stable par f^k . D'après la proposition précédente, il existe J un intervalle inclus dans $] \theta_{i-1}; \theta_{i+1} [$ et V un voisinage de x tel que $\gamma(J) = W_V^s(x_i, h)$. Par conséquent :

$$W^s(x_i, h) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} h^{-nk}(\gamma(J)).$$

Or $\gamma(] \theta_{i-1}; \theta_{i+1} [$) est invariante par h^{-k} . Ce qui démontre que $W^s(x_i, h)$ est inclus dans $\gamma(] \theta_{i-1}; \theta_{i+1} [$). Ainsi :

$$W^s(x_i, h) = \gamma(] \theta_{i-1}; \theta_{i+1} [) \subseteq \gamma(\mathbb{T}^1).$$

Dans le cas où G est strictement croissante sur un voisinage de θ_i , nous obtenons que

$$W^u(x_i, h) = \gamma(] \theta_{i-1}; \theta_{i+1} [) \subseteq \gamma(\mathbb{T}^1).$$

■

Variété stable ou instable et perturbation. Etant donné un arc de classe C^1 contenu dans une variété stable ou instable d'un point périodique hyperbolique d'une application f , voici une proposition qui permet de savoir ce que cet arc devient lorsque l'on perturbe l'application g .

PROPOSITION 4.14. — Soit f un difféomorphisme d'une surface symplectique M , m un entier non nul et p un point périodique hyperbolique de période m de f .

Soit U un voisinage de p et ϕ un difféomorphisme de U sur \mathbb{R}^2 , puis I un intervalle compact et a un réel appartenant à l'intérieur de I .

Soit $c : I \rightarrow U$ un arc de classe C^1 tel que $c(a) = p$ et dont l'image est stable par f^{2m} et incluse dans $W^s(p, f)$.

Il existe \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ et une application continue Λ définie sur \mathcal{U} par :

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{U} &\longrightarrow C^1(I, U) \\ g &\longmapsto c_g \end{aligned}$$

tel que $\Lambda(f) = c$ et tel que pour tout g appartenant à \mathcal{U} , c_g est un arc de classe C^1 tel que :

1. $c_g(a) = q$ est un point k -périodique hyperbolique de g ,
2. $g^{2m}(c_g(I)) \subseteq c_g(I) \subseteq W^s(q, g)$.

Démonstration. — Comme dans la proposition 4.9, nous supposons que p est un point fixe, que $M = U = \mathbb{R}^2$ et que $\phi = \text{id}$.

Soit $r > 0$ et Γ l'application définie sur un voisinage \mathcal{U}_1 de f donnés par la proposition 4.9. Nous noterons γ_g l'image d'une application g par Γ .

D'après la remarque précédente, il existe un entier positif n tel que :

$$c(I) \subseteq f^{-n}(\gamma_f([-r; r])).$$

Posons :

$$\begin{aligned} \psi : I &\longrightarrow [-r; r] \\ t &\longmapsto \gamma_f^{-1} \circ f^n \circ c(t) \end{aligned}$$

C'est une application continue injective qui envoie a sur 0 et telle que pour tout $t \in I$:

$$c(t) = f^{-n} \circ \gamma_f(\psi(t)).$$

Soit g appartenant à \mathcal{U} et t dans I . Posons :

$$c_g(t) = g^{-n} \circ \gamma_g(\psi(t)).$$

Il faut remarquer que $c_f = c$. De plus l'application $c_g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un arc de classe C^1 qui vérifie :

1. $c_g(a) = g^{-n} \circ \gamma_g(\psi(a)) = g^{-n}(\gamma_g(0))$. Or $q = \gamma_g(0)$ est un point fixe hyperbolique de g . Donc $c_g(a) = q$ est un point fixe hyperbolique de g .
2. De plus $c_g(I)$ est inclus dans $g^{-n}(\gamma_g([-r; r]))$. Or il existe un voisinage V' de p tel que $\gamma_g([-r; r])$ est égal à $W_{V'}^s(q, g)$. Par conséquent :

$$c_g(I) \subseteq g^{-n}(g(\gamma_g([-r; r]))) \subseteq g^{-n}(W_{V'}^s(q, g)) \subseteq W^s(q, g).$$

Reste à démontrer que $g^2(c_g(I))$ est inclus dans $c_g(I)$. Pour cela nous allons devoir supposer que g est suffisamment près de f . L'ensemble $\gamma_f([-r; r])$ est stable par f^2 et $\psi(I)$ est un intervalle compact qui contient 0 dans son intérieur. D'après la proposition 4.11, $f^2 \circ \gamma_f(\psi(I))$ est donc inclus dans $\gamma_f(\text{int}\psi(I))$. Or $\text{int}(\psi(I)) = \psi(\text{int}(I))$. Donc :

$$\gamma_f^{-1} \circ f^2 \circ \gamma_g(\psi(I)) \subseteq \text{int}(\psi(I)).$$

Or $\psi(I)$ et $\text{int}(\psi(I))$ sont respectivement un compact et un ouvert de \mathbb{R} . Par conséquent, si une application ζ est suffisamment près de $\gamma_f^{-1} \circ f^2 \circ \gamma_f$, $\zeta(\psi(I))$ est inclus dans $\psi(I)$. Or l'application $g \in \mathcal{U}_1 \rightarrow \gamma_g^{-1} \circ g^2 \circ \gamma_g$ est continue. Il existe donc \mathcal{U} un voisinage de f inclus dans \mathcal{U}_1 tel que si g appartient à \mathcal{U} alors :

$$g^2 \circ \gamma_g(\psi(I)) \subseteq \gamma_g(\psi(I)).$$

or $c_g(I)$ est égal à $g^{-n}(\gamma_g(\psi(I)))$. Donc :

$$g^2(c_g(I)) = g^2(g^{-n} \circ \gamma_g(\psi(I))) = g^{-n}(g^2(\gamma_g(\psi(I)))) \subseteq g^{-n}(\gamma_g(\psi(I))) = c_g(I).$$

Considérons alors l'application Λ définie sur \mathcal{U} par $\Lambda(g) = c_g = g^{-n} \circ \gamma_g \circ \psi$. L'application Λ est une application continue à valeurs dans $C^1([-r, r], \mathbb{R}^2)$ telle que $\Lambda(f) = c$ et qui vérifie les deux assertions de la proposition. \square

4) Variétés stables et instables transverses

DÉFINITION 4.15. — Soit a, b et c trois réels tels que $a < b < c$. Si $\delta : [a; b] \rightarrow M$ et $\gamma : [b; c] \rightarrow M$ sont deux arcs de classe C^1 tels que

1. $\delta(b) = \gamma(b)$,
2. les vecteurs $\delta'(b)$ et $\gamma'(b)$ sont non nuls et non colinéaires

on dit qu'ils sont transverses aux extrémités. On note $\delta([a; b]) \leftrightarrow \gamma([b; c])$.

Etant donnés deux arcs de classe C^1 , transverses à leurs extrémités, inclus respectivement dans une variété stable et dans une variété instable de deux points périodiques hyperboliques d'un difféomorphisme symplectique f . Nous allons démontrer qu'en perturbant f , nous conservons deux arcs de classe C^1 transverses à leurs extrémités, proches des deux arcs précédents et inclus, eux aussi, dans une variété stable ou dans une variété instable.

PROPOSITION 4.16. — Soit f un difféomorphisme d'une surface symplectique M , m un entier non nul, p et q deux points périodiques hyperboliques de période m de f .

Soit U un voisinage de p difféomorphe à \mathbb{R}^2 , puis a, b, c, s_0 et t_0 cinq réels tels que $a < s_0 < b < t_0 < c$. Soit $\gamma_1 : [a; b] \rightarrow U$ et $\gamma_2 : [c; d] \rightarrow U$ deux arcs de classe C^1 transverses aux extrémités tels que :

1. $\gamma_1(s_0) = p$ et $\gamma_2(t_0) = q$,
2. $\gamma_1([a; b])$ et $\gamma_2([b; c])$ sont respectivement inclus dans $W^s(p, f)$ et dans $W^u(q, f)$,
3. $\gamma_1([a; b])$ et $\gamma_2([b; c])$ sont respectivement stables par f^{2m} et f^{-2m} .

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe \mathcal{U} un voisinage de f tel que pour tout g appartenant à \mathcal{U} , il existe $\delta_1 : [a; b] \rightarrow U$ et $\delta_2 : [b; c] \rightarrow U$ deux arcs de classe C^1 transverses aux extrémités tels que :

1. $\delta_1(s_0) = p_g$ et $\delta_2(t_0) = q_g$ sont des points m -périodiques hyperboliques de g ,
2. $\delta_1([a; b])$ et $\delta_2([b; c])$ sont respectivement inclus dans $W^s(p_g, g)$ et dans $W^u(q_g, g)$,
3. $\delta_1([a; b])$ et $\delta_2([b; c])$ sont respectivement stables par g^{2m} et g^{-2m} .

et tels que $\sup_{t \in [a; b]} d(\delta_1(t), \gamma_1(t)) < \varepsilon$ et $\sup_{t \in [b; c]} d(\delta_2(t), \gamma_2(t)) < \varepsilon$.

Démonstration. — Encore ici, pour simplifier les notations, nous allons travailler dans \mathbb{R}^2 et supposer que p et q sont des points fixes de f .

Nous allons tout d'abord prolonger les arcs γ_1 et γ_2 en b de façon à les rendre uniquement transverses puis en appliquant la proposition 4.14, nous trouverons un voisinage suffisamment petit de f dont les éléments admettent une variété stable ou instable proche de γ_1 et γ_2 . Ce qui permet de s'assurer, grâce à la proposition 4.8, que ces nouvelles variétés sont transverses.

LEMME 4.17. —

1. Il existe $B_1 > b$ et $\tilde{\gamma}_1 : [a; B_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc de classe C^1 tel que $\tilde{\gamma}_1([a; B_1]) \subseteq W^s(p, f)$ et $\tilde{\gamma}_1|_{[a; b]} = \gamma_1$.
2. Il existe $B_2 < b$ et $\tilde{\gamma}_2 : [B_2; c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc de classe C^1 tel que $\tilde{\gamma}_2([B_2; c]) \subseteq W^u(q, f)$ et $\tilde{\gamma}_2|_{[b; c]} = \gamma_2$.

Preuve . — Voici une preuve de la première assertion, la seconde assertion se démontrant selon la même méthode.

Soit r un réel strictement positif et $\gamma = \Gamma(f)$ un arc C^1 donnés par la proposition 4.9. D'après la remarque 4.12, il existe un entier n positif tel que :

$$\gamma_1([a; b]) \subseteq f^{-n}(\gamma(] - r; r[)).$$

Considérons l'application ψ définie sur $[a; b]$ par :

$$\begin{aligned} \psi : [a; b] &\longrightarrow] - r; r[\\ t &\longmapsto \gamma^{-1} \circ f^n \circ \gamma_1(t) \end{aligned}$$

L'application ψ est de classe C^1 injective. Quitte à remplacer l'application γ par l'application $t \in] - r; r[\mapsto \gamma(-t)$, nous pouvons supposer qu'elle est strictement croissante.

Notons $\psi(b) = v < r$. Alors :

$$\psi'(b) = \frac{(\gamma_1'(b) \cdot (f^{-n} \circ \gamma)'(v))}{\|(f^{-n} \circ \gamma)'(v)\|}$$

est un réel non nul car $\gamma_1'(b)$ et $(f^{-n} \circ \gamma)'(v)$ sont des vecteurs non nuls colinéaires. Il est même strictement positif car ψ est croissante.

Prolongeons l'application ψ en une application $\tilde{\psi}$ définie sur $[a; +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : [a; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} \psi(t) & \text{si } t \in [a; b] \\ \psi'(b)(t - b) + \psi(b) & \text{si } t \geq b \end{cases} \end{aligned}$$

L'application ψ est une application de classe C^1 strictement croissante. Soit v' un réel appartenant à $]v; r[$. Posons $B_1 = \psi^{-1}(v')$ qui est un réel strictement plus grand que b , puis :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1 : [a; B_1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto f^{-n} \circ \gamma(\tilde{\psi}(t)) \end{aligned}$$

Ainsi :

- $\tilde{\gamma}_1([a; B_1])$ est inclus dans $f^{-n}(\gamma(] - r; r[))$ qui est lui même contenu dans la variété stable de p sous f . Par conséquent :

$$\tilde{\gamma}_1([a; B_1]) \subseteq W^s(p, f).$$

- si t appartient à $[a; b]$, $\tilde{\gamma}(t) = f^{-n} \circ \gamma(\psi(t)) = \gamma_1(t)$. Ainsi :

$$\tilde{\gamma}_1|_{[a; b]} = \gamma_1.$$

■

LEMME 4.18. — Il existe $\alpha > 0$ tel que $\tilde{\gamma}_1([a; b + \alpha]) \pitchfork \tilde{\gamma}_2([b - \alpha; a])$.

Preuve —

• Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $\tilde{\gamma}_1([b - \alpha_1; b + \alpha_1]) \cap \tilde{\gamma}_2([b - \alpha_1; b + \alpha_1]) = \{\tilde{\gamma}_1(b)\}$. Sinon, il existe deux suites de réels différents de a , $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, qui convergent toutes les deux vers b tels que $\gamma_1(a_n) = \gamma_2(b_n)$, ainsi :

$$\frac{\gamma_1(a_n) - \gamma_1(b)}{a_n - b} = \frac{\gamma_2(b_n) - \gamma_2(b)}{b_n - b} \frac{b_n - b}{a_n - b},$$

ce qui implique que $\gamma'_1(b)$ et $\gamma'_2(b)$ sont colinéaires, ce qui est contraire au fait que γ_1 et γ_2 sont transverses aux extrémités.

• Par continuité de $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$, et du fait que $\tilde{\gamma}_1([a; b - \alpha_1])$ et $\tilde{\gamma}_2([b; c])$ d'une part et que $\tilde{\gamma}_1([a; b])$ et $\tilde{\gamma}_2([b + \alpha_1; c])$ d'autre part, sont disjoints, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\tilde{\gamma}_1([a; b - \alpha_1]) \cap \tilde{\gamma}_2([b - \alpha_2; c]) = \emptyset \text{ et } \tilde{\gamma}_1([a; b + \alpha_2]) \cap \tilde{\gamma}_2([b + \alpha_1; c]) = \emptyset.$$

Il suffit alors de poser $\alpha = \min\{\alpha_1; \alpha_2\}$. ■

LEMME 4.19. — $\tilde{\gamma}_1([a; b + \alpha])$ et $\tilde{\gamma}_2([b - \alpha; a])$ sont stables respectivement par f^2 et par f^{-2} .

Preuve — D'après la construction de $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_1([a; b + \alpha]) = f^{-n} \circ \gamma(\psi([a; b + \alpha]))$. Or $\psi([a; b + \alpha])$ est un intervalle inclus dans $] -r; r[$ contenant $\psi(s_0) = 0$ dans son intérieur et $f^{-n} \circ \gamma(]-r; r])$ est stable par f^2 . En utilisant la proposition 4.11, on conclut que $\tilde{\gamma}_1([a; b + \alpha])$ est stable par f^2 .

De la même façon, $\tilde{\gamma}_2([b - \alpha; a])$ est stable par f^{-2} . ■

Reprenons la preuve de la proposition 4.16 et fixons un réel ε strictement positif.

Notons $I = [a; b + \alpha]$ et $J = [b - \alpha; b]$. Il existe $\eta > 0$ tel que :

- $\forall (u_1, u_2) \in I \times I, |u_1 - u_2| < \eta \Rightarrow \|\gamma_1(u_1) - \gamma_1(u_2)\| < \varepsilon/2,$
- $\forall (v_1, v_2) \in J \times J, |v_1 - v_2| < \eta \Rightarrow \|\gamma_2(v_1) - \gamma_2(v_2)\| < \varepsilon/2.$

D'après la proposition 4.8, il existe $\mu \in]0; \varepsilon/2[$ tel que si deux arcs $\delta_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\delta_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 vérifient $\|\delta_1 - \gamma_1\|_\infty < \mu$ et $\|\delta_2 - \gamma_2\|_\infty < \mu$ alors :

1. $\delta_1(I) \pitchfork \delta_2(J),$
2. si $(u_0, v_0) \in I \times J$ vérifie $\delta_1(u_0) = \delta_2(v_0)$ alors :
 - $s < u_0 < b$ et $b < v_0 < t,$
 - $|u_0 - b| < \eta$ et $|v_0 - b| < \eta.$

La proposition 4.14, grâce à la continuité de l'application Λ , nous donne un voisinage \mathcal{V} de f associé à cette constante μ . Soit g appartenant ce voisinage \mathcal{V} , il existe alors $c_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $c_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux arcs de classe C^1 tels que :

- $\|c_1 - \gamma_1\|_\infty < \mu$ et $\|c_2 - \gamma_2\|_\infty < \mu,$
- $c_1(s_0) = p_g$ et $c_2(t_0) = q_g$ sont des points fixes hyperboliques de $g,$
- $c_1(I)$ et $c_2(J)$ sont respectivement inclus dans $W^s(p_g, g)$ et dans $W^u(q_g, g),$
- $c_1(I)$ et $c_2(J)$ sont respectivement stables par f^2 et $f^{-2}.$

Par construction de μ , les arcs c_1 et c_2 sont uniquement transverses et si l'on note $(u_0; v_0) \in I \times J$ tel que $c_1(u_0) = c_2(v_0)$ alors u_0 est compris entre s_0 et b pendant que v_0 est compris entre b et t_0 . Ainsi :

$$p_g = c_1(s_0) \in c_1(]a; u_0]),$$

$$q_g = c_2(t_0) \in c_2(]v_0; c]).$$

Nous allons reparamétriser $c_1|_{]a; u_0]}$ et $c_2|_{]v_0; c]}$ de façon à obtenir $\delta_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\delta_2 : [b; c] \rightarrow \mathbb{R}$ deux arcs de classe C^1 dont les images coïncident respectivement avec les images de c_1 et de c_2 . Ce seront alors deux arcs, transverses à leurs extrémités, dont les images respectives contiennent p_g et q_g et sont contenus dans les variétés stables ou instables de ces deux points fixes hyperboliques de g . Grâce au

choix de η , nous démontrerons que $\sup_{t \in [a; b]} d(\delta_1(t), \gamma_1(t)) < \varepsilon$ et $\sup_{t \in [b; c]} d(\delta_2(t), \gamma_2(t)) < \varepsilon$.

Considérons les deux applications ϕ_1 et ϕ_2 définies par :

$$\begin{aligned} \phi_1 : [a; b] &\longrightarrow [a; u_0] \\ u &\longmapsto \frac{u_0 - a}{b - a}(u - a) + a \\ \phi_2 : [b; c] &\longrightarrow [v_0; c] \\ v &\longmapsto \frac{v_0 - c}{b - c}(v - c) + c \end{aligned}$$

Ces deux applications sont des applications bijectives de classe C^1 strictement croissantes. De plus :

$$\begin{aligned} |\phi_1(u) - u| &< |u_0 - b| < \eta, \\ |\phi_2(v) - v| &< |v_0 - b| < \eta. \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser :

$$\begin{aligned} \delta_1 : [a; b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\longmapsto c_1 \circ \phi_1(u) \\ \delta_2 : [b; c] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\longmapsto c_2 \circ \phi_2(v) \end{aligned}$$

Ces deux arcs δ_1 et δ_2 vérifient :

1. $\delta_1(b) = c_1(\phi_1(b)) = c_1(u_0)$ et $\delta_2(b) = c_2(\phi_2(b)) = c_2(v_0)$. Par conséquent :

$$\delta_1(b) = \delta_2(b).$$

2. $\delta_1'(b) = \phi_1'(b)c_1'(u_0) = \frac{u_0 - a}{b - a}c_1'(u_0)$ et $\delta_2'(b) = \phi_2'(b)c_2'(v_0) = \frac{v_0 - c}{b - c}c_2'(b)$. Par conséquent, les vecteurs $\delta_1'(b)$ et $\delta_2'(b)$ ne sont pas colinéaires.

Ils sont donc transverses à leurs extrémités. De plus l'image de δ_1 qui est égale à $c_1([a; u_0])$, est incluse dans $W^s(p_g, g)$, et l'image de δ_2 qui est égale à $c_2([v_0; c])$ est incluse dans $W^u(q_g, g)$. Enfin si u appartient à $[a; b]$, comme $|\phi_1(u) - u| < \eta$,

$$\begin{aligned} \|\delta_1(u) - \gamma_1(u)\| &= \|c_1(\phi_1(u)) - \gamma_1(u)\| \\ &\leq \|c_1(\phi_1(u)) - \gamma_1(\phi_1(u))\| + \|\gamma_1(\phi_1(u)) - \gamma_1(u)\| \\ &< \mu + \varepsilon/2 < \varepsilon \end{aligned}$$

De même si v appartient à $[b; c]$, $\|\delta_2(v) - \gamma_2(v)\| < \varepsilon$. □

REMARQUE 4.20. On peut évidemment utiliser d'autres changements de paramétrage que ϕ_1 et ϕ_2 . Par exemple on peut prendre ϕ_1 et ϕ_2 de façon à obtenir δ_1 et δ_2 qui coïncident respectivement avec c_1 et c_2 sur $[a; s_0]$ et sur $[t_0; c]$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \delta_1'(s_0) &= c_1'(s_0) = \Lambda(\gamma_1)'(s_0), \\ \delta_2'(t_0) &= c_2'(t_0) = \Lambda(\gamma_2)'(t_0). \end{aligned}$$

Ce qui signifie que le vecteur tangent de δ_1 en s_0 ne dépend que de la courbe γ_1 de départ et ne dépend ni du prolongement $\tilde{\gamma}$ ni de la courbe γ_2 . De même, le vecteur tangent de δ_2 en t_0 ne dépend que de la courbe γ_2 .

Chapitre IV

Perturber une application symplectique

Comment perturber une application symplectique en topologie C^1 tout en s'assurant que, perturbation faite, la nouvelle application obtenue est encore symplectique ?

Nous allons voir qu'il est possible en général d'associer dans certains cas à une application symplectique une fonction à valeurs réelles, appelée fonction génératrice.

L'intérêt de cette fonction génératrice est qu'il est plus facile de modifier localement une fonction à valeurs réelles alors qu'il semble plus difficile de perturber directement une application symplectique. Nous avons alors un moyen de perturber des applications symplectiques à condition de savoir remonter d'une fonction génératrice vers une application symplectique.

Il existe dans la littérature différents types de fonctions génératrices qui dépendent des caractéristiques des applications symplectiques que l'on cherche à perturber. Citons celles qui sont le plus fréquemment utilisées :

– Celles qu'on associe à des difféomorphismes proches de l'identité, qu'on peut par exemple trouver dans l'appendice 3.2 de [ArAv67] ou dans [AbMa78], page 379.

– Celles qui interviennent dans le cadre des applications qui dévient la verticale. Elles sont généralement définies globalement. Le lecteur peut trouver une description dans [Go01].

Nous nous sommes attachés à définir rigoureusement dans la première partie de ce chapitre, la correspondance entre application symplectique et fonction génératrice en travaillant dans des classes d'applications convenables et en démontrant qu'il s'agit, en munissant les espaces d'applications considérés de topologies convenables, d'un homéomorphisme. Nous parlerons de deux classes d'applications :

- La première concerne certaines applications symplectiques définies sur un ouvert de \mathbb{R}^2 . Cela nous permettra de perturber localement des difféomorphismes symplectiques d'une surface au voisinage d'un point.
- La seconde concerne une certaine classe d'applications symplectiques de l'anneau. Nous pourrons alors perturber des difféomorphismes de l'anneau au voisinage d'un cercle de la forme $\mathbb{T}^1 \times \{r\}$ puis de perturber des applications symplectiques d'une surface au voisinage d'une courbe. La notion de fonctions génératrices abordée ici est plus globale.

Dans la seconde partie, nous utiliserons la première catégorie de fonctions génératrices pour perturber des difféomorphismes symplectiques pour "remplacer" un difféomorphisme symplectique au voisinage d'un de ses points périodiques par sa différentielle en ce point. Ensuite nous ferons subir une petite transformation sur la différentielle d'un difféomorphisme au voisinage d'un point quelconque de la surface, mais sans utiliser le formalisme des fonctions génératrices.

Le but de la troisième partie est de perturber une rotation de l'anneau au voisinage d'un cercle $\mathbb{T}^1 \times \{r\}$ de façon à obtenir un difféomorphisme proche de la rotation initiale mais qui possède un nombre fini de points périodiques sur ce cercle, tous hyperboliques.

Enfin en quatrième partie, nous utiliserons ces résultats pour perturber un difféomorphisme symplectique au voisinage de l'un de ses points périodiques elliptiques pour construire une courbe fermée simple qui entoure ce point et sur lequel le nouveau difféomorphisme, obtenu par perturbation, possède un nombre fini de points périodiques, tous hyperboliques.

1 Outils de perturbation

1.1 A propos de la topologie de Whitney

La topologie de Whitney a déjà été abordée dans le chapitre 2 à propos de l'espace d'applications $\text{Diff}_\omega^1(M)$ avec lequel nous travaillons dans ce chapitre. Ici nous allons l'aborder dans un sens plus large, dans des espaces d'applications de classe plus élevée ou entre des variétés différentiables différentes.

Nous donnerons aussi quelques résultats utiles tout au long de ce chapitre. Nous renvoyons à [Hi76] pour une preuve des résultats dont nous ne donnons pas de preuve.

Notations : Soit m, n et k trois entiers positifs non nuls, O un ouvert de \mathbb{R}^m et D une partie quelconque incluse dans O . Soit $f : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k . Alors :

$$\|f\|_{C^k, D} = \sup_{x \in D} \{ \|f(x)\|, \|Df(x)\|, \dots, \|D^k f(x)\| \}.$$

où $D^i f(x)$ est la différentielle $i^{\text{ème}}$ de f en x .

Soit M et N deux variétés différentiables de classe C^k . On note $C^k(M, N)$ l'ensemble des applications de classe C^k définies sur M à valeurs dans N . Le sous ensemble $\text{Diff}^k(M, N)$ de $C^k(M, N)$ désigne l'ensemble des difféomorphismes de M sur N de classe C^k . Si $M = N$, on note $C^k(M)$ et $\text{Diff}^k(M)$ ces deux ensembles.

DÉFINITION 1.1. — Soit k un entier positif non nul. Soit M et N deux variétés différentiables de classe C^k .

La C^k topologie forte de Whitney sur $C^k(M, N)$ est engendrée par les ensembles définis ci-dessous :

Soit $f \in C^k(M, N)$, $(U_i, h_i)_{i \in I}$ une famille de cartes de M et $(V_i, k_i)_{i \in I}$ une famille de cartes de N , $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts de M et $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ une famille de réels tels que $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts localement finie et $f(K_i) \subseteq V_i$ quelque soit $i \in I$. Définissons

$$U(f; (U_i, h_i)_{i \in I}; (V_i, k_i)_{i \in I}; (K_i)_{i \in I}; (\varepsilon_i)_{i \in I})$$

comme étant l'ensemble des applications $g \in C^k(M, N)$ tels que $g(K_i) \subseteq V_i$ et tels que pour tout $x \in h(K_i)$:

$$\|k_i \circ f \circ h_i^{-1} - k_i \circ g \circ h_i^{-1}\|_{C^k, K_i} < \varepsilon_i,$$

Les ensembles de la forme $U(f; (U_i, h_i)_{i \in I}; (V_i, k_i)_{i \in I}; (K_i)_{i \in I}; (\varepsilon_i)_{i \in I})$ forment une base de voisinages de l'application f dans $C^k(M, N)$.

Dans ce chapitre, tous les espaces d'applications de classe C^k seront munis de la topologie induite par la C^k topologie forte de Whitney sur l'espace des applications de classe C^k .

Soit k un entier non nul. Considérons M, N et P trois variétés différentiables de classe C^k .

PROPOSITION 1.2. — L'ensemble $\text{Diff}^k(M, N)$ est un ouvert de $C^k(M, N)$.

PROPOSITION 1.3. — Les deux applications définies par :

$$\begin{array}{ccc} \text{Diff}^k(M, N) & \longrightarrow & \text{Diff}^k(M, N) & \text{et} & C^1(N, P) \times \text{Diff}^k(M, N) & \longrightarrow & C^1(M, P) \\ f & \longmapsto & f^{-1} & & (g, f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

sont continues pour la topologie C^k forte de Whitney.

Voici enfin deux résultats dont nous nous servirons plusieurs fois par la suite.

PROPOSITION 1.4. — Soit U et V deux ouverts de \mathbb{R}^2 et K un compact inclus dans U . Soit f un difféomorphisme de U sur V .

Il existe un voisinage \mathcal{U} de f tel que toute application $g \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ appartenant à \mathcal{U} et coïncidant avec f hors de K est un difféomorphisme de U sur V .

Démonstration. — D'après la proposition 1.2 montrée dans [Hi76], la topologie que nous utilisons étant la topologie forte de Whitney, $\text{Diff}^1(U, V)$ est un ouvert parmi les applications de classe C^1 définies sur U à valeurs dans V . Il existe donc un voisinage \mathcal{U}' de f dans $C^1(U, \mathbb{R}^2)$ tel que si $f \in \mathcal{U}'$ et si $f(U) \subseteq V$ alors $f \in \text{Diff}^1(U, V)$.

De plus l'ensemble $f(K)$ étant compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subseteq V$ quelque soit $x \in f(K)$.

Considérons alors \mathcal{U} le voisinage de f dans $C^1(U, \mathbb{R}^2)$ défini par :

$$g \in \mathcal{U} \iff g \in \mathcal{U}' \text{ et } \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon.$$

Démontrons que \mathcal{U} est un voisinage de f qui convient. Soit $g \in \mathcal{U}$ et $x \in U$ tels que $g|_{U \setminus K} = f|_{U \setminus K}$:

- si $x \notin K$, $g(x) = f(x)$ appartient à V ,
- si $x \in K$, $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ ce qui signifie que $g(x) \in B(f(x), \varepsilon)$. Or $f(x) \in f(K)$ donc $B(f(x), \varepsilon)$ est inclus dans V . Ainsi $g(x)$ appartient à V .

Par conséquent $g(U)$ est inclus dans V . Or $g \in \mathcal{U}'$. Ainsi g est un difféomorphisme de U sur V . \square

PROPOSITION 1.5. — Soit M et N deux variétés, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^k(M, N)$. Soit \mathcal{U} un voisinage de f dans $C^k(M, N)$ et O un ouvert de M .

Il existe \mathcal{U}' un voisinage de $f|_O$ dans $C^k(O, N)$ tel que si une application $g \in C^k(M, N)$ coïncide avec f hors de O et si sa restriction à O appartient à \mathcal{U}' , alors g appartient à \mathcal{U} .

Démonstration. — Soit $(U_i, h_i)_{i \in I}$ et $(V_i, k_i)_{i \in I}$ deux familles de cartes respectivement de M et de N , $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts de M et $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ une famille de réels tels que $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts localement finie, le compact $f(K_i)$ est inclus dans V_i quelque soit $i \in I$ et $U(f; (U_i, h_i)_{i \in I}; (V_i, k_i)_{i \in I}; (K_i)_{i \in I}; (\varepsilon_i)_{i \in I})$ est inclus dans \mathcal{U} .

Or il existe $(C_j)_{j \in J}$ une famille de compacts de M telle que :

- $O = \bigcup_{j \in J} C_j$
- pour tout $x \in O$, il existe W un voisinage de x tel que W rencontre un nombre fini de C_j .

Considérons l'ensemble \mathcal{U}' inclus dans $C^k(O, N)$ tel que $g \in \mathcal{U}'$ si et seulement si :

- $g(K_i \cap C_j)$ est inclus dans V_i ,
- $\|k_i \circ f|_O \circ h_i^{-1} - k_i \circ g \circ h_i^{-1}\|_{C^k, h_i(K_i \cap C_j)} < \varepsilon_i$ pour tout $(i, j) \in I \times J$.

Cet ensemble \mathcal{U}' est alors le voisinage de $f|_O$ qui convient. \square

1.2 Fonctions génératrices sur un ouvert du plan

• Préliminaires et notations

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 . Les points de U sont notés (x, y) . On munit U de la forme symplectique canonique $dx \wedge dy$.

Soit V un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant 0. Les points de V sont notés (x, q) . Si H est une application définie sur V à valeurs réelles de classe C^1 , nous noterons $\frac{\partial H}{\partial x}$ la dérivée partielle de H selon la première variable et $\frac{\partial H}{\partial q}$ la dérivée partielle de H selon la seconde variable.

Pour toute application f définie sur un ensemble D à valeurs dans \mathbb{R}^2 , nous noterons respectivement $f_1(u)$ et $f_2(u)$ la première et la seconde composante de $f(u)$, u appartenant à D .

Si f est une application définie sur U à valeurs dans \mathbb{R}^2 , posons :

$$\begin{aligned} \phi_f : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, f_2(x, y)) \end{aligned}$$

Si H est une application définie sur V à valeurs réelles de classe C^1 , posons :

$$\begin{aligned} \psi_H : \quad V &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, q) &\longmapsto (x, \frac{\partial H}{\partial x}(x, q)) \end{aligned}$$

REMARQUE 1.6. —

1. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si ϕ_f est un difféomorphisme de U sur V , $(\phi_f)^{-1}$ est de la même forme que ϕ_f : il existe $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $(\phi_f)^{-1}(x, q) = (x, g(x, q))$ quelque soit $(x, q) \in V$.
2. Soit $H : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , l'application ψ_H coïncide avec l'application $\phi_{\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial x}}$.

Considérons les espaces de fonctions suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(U, V) &= \{f \in C^1(U, \mathbb{R}^2) \mid \phi_f \in \text{Diff}^1(U, V)\} \\ \mathcal{F}(U, V) &= \{f \in \mathcal{E}(U, V) \mid f^* dx \wedge dy = dx \wedge dy\} \\ \mathcal{H}(U, V) &= \{H \in C^2(V, \mathbb{R}) \mid H(0) = 0 \text{ et } \psi_H \in \text{Diff}^1(V, U)\} \end{aligned}$$

REMARQUE 1.7. — Soit $H \in C^2(V, \mathbb{R}^2)$ tel que $H(0) = 0$ alors

$$H \in \mathcal{H}(U, V) \iff (x, q) \in V \mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial x}\right)(x, q) \in \mathbb{R}^2 \text{ est un élément de } \mathcal{E}(V, U).$$

Puis considérons les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi_{UV} : \quad \mathcal{E}(U, V) &\longrightarrow C^1(V, \mathbb{R}^2) \\ f &\longmapsto h : \begin{cases} V &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, q) &\mapsto (f_1(\phi_f^{-1}(x, q)), (\phi_f^{-1})_2(x, q)) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{UV} : \quad \mathcal{H}(U, V) &\longrightarrow C^1(V, \mathbb{R}^2) \\ H &\longmapsto (x, q) \mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial x}\right)(x, q) \end{aligned}$$

Enfin posons $\mathcal{G}(U, V) = \Phi_{UV}(\mathcal{F}(U, V))$. Il est inclus dans $C^1(V, \mathbb{R}^2)$.

• **Définition d'une fonction génératrice**

Voici tout d'abord une proposition vérifiée par ce qui a été défini ci-dessus nécessaire à la cohérence de la définition :

PROPOSITION 1.8. — Soit U et V deux ouverts de \mathbb{R}^2 tels que V est simplement connexe et contient 0.

1. Φ_{UV} est un homéomorphisme de $\mathcal{E}(U, V)$ sur $\mathcal{E}(V, U)$. De plus :

- $\Phi_{UV}^{-1} = \Phi_{V,U}$,
- $\phi_{\Phi_{UV}(f)} = \phi_f^{-1}$ pour tout $f \in \mathcal{E}(U, V)$.

En particulier, Φ_{UV} est un homéomorphisme de $\mathcal{F}(U, V)$ sur $\mathcal{G}(U, V)$.

2. Ψ_{UV} est un homéomorphisme de $\mathcal{H}(U, V)$ sur $\mathcal{G}(U, V)$.

De cette proposition dont nous donnons une preuve à la fin de ce paragraphe, nous déduisons facilement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.9. — L'application $S_{UV} = \Psi_{UV}^{-1} \circ \Phi_{UV} : \mathcal{F}(U, V) \rightarrow \mathcal{H}(U, V)$ est un homéomorphisme.

REMARQUE 1.10. — Nous avons donc un homéomorphisme entre $\mathcal{F}(U, V)$ (inclus dans l'ensemble des applications de U dans \mathbb{R}^2 préservant la 2-forme $dx \wedge dy$) et $\mathcal{H}(U, V)$ (inclus dans $C^2(V, \mathbb{R})$) donné par la relation :

$$f(x, y) = (X, q) \iff y = \frac{\partial H}{\partial x}(x, q) \text{ et } X = \frac{\partial H}{\partial q}(x, q).$$

DÉFINITION 1.11. — Si $f \in \mathcal{F}(U, V)$ son image $S_{UV}(f)$ est la **fonction génératrice** de l'application f .

Pour perturber un élément f de $\mathcal{F}(U, V)$, on considère sa fonction génératrice $H = S_{UV}(f)$ que l'on modifie dans $C^2(V, \mathbb{R}^2)$, à l'aide de fonctions plateaux par exemple, tout en s'assurant que l'on reste dans $\mathcal{H}(U, V)$.

Une fois que l'on a trouvé \tilde{H} qui convient, on pose $\tilde{f} = S_{UV}(\tilde{H})$.

Voici un tableau qui résume la méthode développée ci-dessus :

perturbation
dans $C^1_{dx \wedge dy}(U, \mathbb{R}^2)$



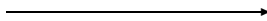
$f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ tel que $f_1 df_2 + y dx$ est fermée $\phi_f : (x, y) \in U \rightarrow (x, f_2(x, y)) \in V$ est un C^1 difféomorphisme	$\tilde{f} \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ définie par $(\tilde{f}(x, \tilde{g}_2(x, q))) = (\tilde{g}_1(x, q), y)$ ainsi : $\tilde{f}_1 d\tilde{f}_2 + y dx$ est fermée $\phi_{\tilde{f}} : (x, y) \in U \rightarrow (x, \tilde{f}_2(x, y)) \in V$ est un C^1 difféomorphisme
---	--



$g \in C^1(V, \mathbb{R}^2)$ définie par $g(x, f_2(x, y)) = (f_1(x, y), y)$ ainsi : $g_1 dq + g_2 dx = (\phi_f^{-1})^*(f_1 df_2 + y dx)$ est exacte $\phi_g : (x, q) \in V \rightarrow (x, g_2(x, q)) \in U$ est un C^1 difféomorphisme	$\tilde{g} \in C^1(V, \mathbb{R}^2)$ définie par $\tilde{g}(x, q) = (\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q}(x, q), \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}(x, q))$ ainsi : $\tilde{g}_1 dq + \tilde{g}_2 dx = d\tilde{H}$ est exacte $\phi_{\tilde{g}} : (x, q) \in V \rightarrow (x, \tilde{g}_2(x, q)) \in U$ est un C^1 difféomorphisme
---	---



$H \in C^2(V, \mathbb{R})$ définie par $\tilde{g}_1 dq + \tilde{g}_2 dx = d\tilde{H}$ et $\tilde{H}(0) = 0$ ainsi : $H(0) = 0$ $\psi_H : (x, q) \in V \rightarrow (x, \frac{\partial H}{\partial x}(x, q)) \in U$ est un C^1 difféomorphisme	$\tilde{H} \in C^2(V, \mathbb{R})$ tel que $\tilde{H}(0) = 0$ $\psi_{\tilde{H}} : (x, q) \in V \rightarrow (x, \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}(x, q)) \in U$ est un C^1 difféomorphisme
--	---



perturbation
dans $C^2(V, \mathbb{R})$

Preuve de la proposition 1.8. —

1. — Notons tout d'abord que Φ_{UV} est à valeurs dans $\mathcal{E}(V, U)$. En effet si $f \in \mathcal{E}(U, V)$ et si $h = \Phi_{UV}(f)$ alors h est une application de classe C^1 définie sur V par :

$$h(x, q) = (f_1(\phi_f^{-1}(x, q)), (\phi_f^{-1})_2(x, q)), \quad \forall (x, q) \in V.$$

Ainsi pour tout $(x, q) \in V$,

$$\phi_h(x, q) = (x, h_2(x, q)) = (x, (\phi_f^{-1})_2(x, q)).$$

Or $\phi_f(x, y) = (x, (\phi_f)_2(x, y))$ quelque soit $(x, y) \in U$. Ainsi :

$$\phi_f^{-1}(x, q) = (x, (\phi_f^{-1})_2(x, q)).$$

Par conséquent :

$$\phi_h(x, q) = \phi_f^{-1}(x, q).$$

Ainsi, ϕ_h est un difféomorphisme de V sur U . Par conséquent, $h \in \mathcal{E}(V, U)$ et $\phi_{\Phi_{UV}(f)} = \phi_f^{-1}$.

Remarquons ensuite que $\Phi_{UV} \circ \Phi_{VU}$ coïncide avec l'identité sur $\mathcal{E}(U, V)$. En effet si $f \in \mathcal{E}(U, V)$ et si $h = \Phi_{UV}(f)$, alors pour tout $(x, y) \in U$,

$$\begin{aligned} \Phi_{VU}(h)(x, y) &= (h_1(\phi_h^{-1}(x, y)), (\phi_h^{-1})_2(x, y)) \\ &= (f_1(\phi_f^{-1}(\phi_h^{-1}(x, y))), (\phi_h^{-1})_2(x, y)). \end{aligned}$$

Or $\phi_f^{-1} = \phi_h$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \Phi_{VU}(h)(x, y) &= (f_1(x, y), (\phi_f)_2(x, y)) \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

Ainsi $\Phi_{VU}(\Phi_{UV}(f)) = f$. D'où le fait que $\Phi_{UV} : \mathcal{E}(U, V) \rightarrow \mathcal{E}(V, U)$ est une bijection d'inverse Φ_{VU} . Reste donc seulement à vérifier que Φ_{UV} est continue puisqu'en permutant U et V , nous aurons alors obtenu que $(\Phi_{UV})^{-1} = \Phi_{VU}$ est aussi continue.

Pour cela, considérons les applications :

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \mathcal{E}(U, V) &\longrightarrow \text{Diff}^1(U, V) \\ f &\longmapsto \phi_f \\ \alpha_2 : \mathcal{E}(U, V) &\longrightarrow C^1(U, \mathbb{R}^2) \\ f &\longmapsto \begin{cases} U \rightarrow V \\ (x, y) \mapsto (f_1(x, y), y) \end{cases} \\ \alpha_3 : C^1(U, \mathbb{R}^2) \times \text{Diff}^1(U, V) &\longrightarrow C^1(V, \mathbb{R}^2) \\ (u, v) &\longmapsto u \circ v^{-1} \end{aligned}$$

D'une part $\Phi_{UV}(f) = \alpha_3(\alpha_2(f), \alpha_1(f))$ pour tout $f \in \mathcal{E}(U, V)$. D'autre part, α_1 , α_2 et α_3 sont continues, tous les espaces d'applications considérés étant munis des topologies induites par la topologie de Whitney (cf la proposition 1.3 du paragraphe 1.1 sur la topologie de Whitney). L'application Φ_{UV} est donc bien continue.

2. — Pour montrer que Ψ_{UV} est un homéomorphisme de $\mathcal{H}(U, V)$ sur $\mathcal{G}(U, V)$, donnons tout d'abord par le lemme suivant une caractérisation de $\mathcal{G}(U, V)$:

LEMME 1.12. — Soit h une application C^1 définies sur V à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

$$h \in \mathcal{G}(U, V) \iff h \in \mathcal{E}(V, U) \text{ et } h_1 dq + h_2 dx \text{ est une 1-forme fermée sur } V.$$

Preuve du lemme 1.12. — Soit $h \in \mathcal{E}(V, U)$ et $f = \Phi_{V,U}(h) \in \mathcal{E}(U, V)$.

D'après la partie 1 de la proposition 1.8, $\phi_f = \phi_h^{-1}$. Ainsi $f = (h_1 \circ \phi_h^{-1}, (\phi_h)_2) = (h_1 \circ \phi_f, (\phi_f)_2)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \phi_f^*(h_1 dq + h_2 dx) &= (h_1 \circ \phi_f) \phi_f^* dq + (h_2 \circ \phi_f) \phi_f^* dx \\ &= f_1 d(\phi_f)_2 + y d(\phi_f)_1 \\ &= f_1 df_2 + y dx. \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} f^* dx \wedge dy - dx \wedge dy &= d(f_1 df_2 + y dx) \\ &= d(\phi_f^*(h_1 dq + h_2 dx)) \\ &= \phi^*(d(h_1 dq + h_2 dx)). \end{aligned}$$

Ainsi

$$f^* dx \wedge dy = dx \wedge dy \iff d(h_1 dq + h_2 dx) = 0. (\star)$$

(\Rightarrow) Soit $h \in \mathcal{G}(U, V)$, il existe $f \in \mathcal{F}(U, V)$ tel que $h = \Phi_{UV}(f)$. Ainsi :

$$f \in \mathcal{E}(U, V), \text{ et } f^*(dx \wedge dy) = dx \wedge dy.$$

Or d'après le premier point la proposition 1.8, $\Phi_{UV}^{-1} = \Phi_{V,U}$. Donc $f = \Phi_{V,U}(h)$. On peut donc appliquer (\star) et en déduire que :

$$d(h_1 dq + h_2 dx) = 0.$$

Comme $\mathcal{G}(U, V) \subseteq \mathcal{E}(V, U)$,

$$h \in \mathcal{E}(V, U).$$

(\Leftarrow) Réciproquement, soit $h \in \mathcal{E}(V, U)$ tel que $h_1 dq + h_2 dx$ est fermée sur V . Posons :

$$f = \Phi_{V,U}(h) \in \mathcal{E}(U, V).$$

D'après (\star), $f^* dx \wedge dy = dx \wedge dy$. Donc :

$$f \in \mathcal{F}(U, V).$$

Or $h = \Phi_{V,U}^{-1}(f) = \Phi_{UV}(f)$. Par conséquent :

$$h \in \mathcal{G}(U, V).$$

■

Notons $h = \Psi_{UV}(H) = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial x}\right)$. D'une part d'après la remarque 1.10 on sait que h appartient à $\mathcal{E}(V, U)$. D'autre part,

$$h_1 dq + h_2 dx = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial x} dx = dH.$$

Ainsi, $h_1 dq + h_2 dx$ est une 1-forme exacte sur V . Elle est donc fermée. On obtient alors par application du lemme 1.12, que $h \in \mathcal{G}(U, V)$. Par conséquent l'application Ψ_{UV} restreinte à $\mathcal{H}(U, V)$ est à valeur dans $\mathcal{G}(U, V)$.

L'application Ψ_{UV} est injective. En effet soit H_1 et H_2 dans $\mathcal{H}(U, V)$ tels que $\Psi_{UV}(H_1) = \Psi_{UV}(H_2)$. Alors :

$$\frac{\partial H_1}{\partial q} = \frac{\partial H_2}{\partial q} \text{ et } \frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{\partial H_2}{\partial x}.$$

Comme V est connexe, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $H_1 = H_2 + k$. Or $H_1(0) = H_2(0) = 0$ donc $k = 0$. Ainsi $H_1 = H_2$.

Démontrons que Ψ_{UV} est surjective. Soit $h \in \mathcal{G}(U, V)$. D'après (\star) , la 1-forme $h_1 dq + h_2 dx$ est fermée. Or V est un ouvert simplement connexe. Ainsi d'après le lemme de Poincaré, c'est une 1-forme exacte. Il existe donc $\tilde{H} : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tel que :

$$h_1 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q} \text{ et } h_2 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}.$$

Posons :

$$H(x, q) = \tilde{H}(x, q) - \tilde{H}(0), \forall (x, q) \in V.$$

Cette application H vérifie alors que $H(0) = 0$ et que $\left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q}, \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}\right) = h$.

Or, $h \in \mathcal{G}(U, V)$ et $\mathcal{G}(U, V) \subseteq \mathcal{E}(V, U)$. Par conséquent :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial x}\right) \in \mathcal{E}(V, U).$$

De plus $H(0) = 0$. Ainsi d'après la remarque 1.7 on a bien :

$$H \in \mathcal{H}(U, V).$$

Par conséquent $\Psi_{UV}(H) = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial x}\right) = h$ avec $H \in \mathcal{H}(U, V)$.

L'application Ψ_{UV} est donc une bijection de $\mathcal{H}(U, V)$ sur $\mathcal{G}(U, V)$.

Le fait que Ψ_{UV} est continue ce déduit immédiatement de la définition des topologies C^1 et C^2 de Whitney.

Reste à vérifier que $\Psi_{UV}^{-1} : \mathcal{G}(U, V) \rightarrow \mathcal{H}(U, V)$ l'est aussi. Soit $g \in \mathcal{G}(U, V)$, notons $G = \Psi_{UV}^{-1}(g)$. Pour tout $X = (x, q) \in V$,

$$g(x, q) = \left(\frac{\partial G}{\partial q}(x, q), \frac{\partial G}{\partial x}(x, q)\right) \text{ et } DG(x, q) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x, q), \frac{\partial G}{\partial q}(x, q)\right),$$

$$Dg(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial q}(X) & \frac{\partial^2 G}{\partial q^2}(X) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial q}(X) \end{pmatrix} \text{ et } D^2G(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(X) & \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial q}(X) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial q}(X) & \frac{\partial^2 G}{\partial q^2}(X) \end{pmatrix}.$$

Or $G(0) = 0$. Le théorème des accroissements finis permet alors de montrer que $G = \Psi_{UV}^{-1}(g) \in \mathcal{H}(U, V)$ dépend continument de $g \in \mathcal{G}(U, V)$ pour la topologie C^1 forte. Ainsi Ψ_{UV}^{-1} est continue. ■

• **Remonter d'une fonction génératrice vers une application symplectique d'un ouvert du plan**

Soit f un élément de $\mathcal{F}(U, V)$ et $H = S_{UV}(f)$ la fonction génératrice de f . On cherche donc à perturber f de façon à obtenir g vérifiant certaines propriétés. L'idée est de modifier H . Mais comment perturber H pour obtenir que $g = S_{UV}^{-1}(H)$ vérifie les propriétés désirées.

Par exemple, si U est un voisinage de 0, considérons $f \in \mathcal{F}(U, V)$ tel que $f(0) = 0$. On veut perturber f pour obtenir une application g appartenant à $\mathcal{F}(U, V)$ qui coïncide avec l'identité sur un voisinage de 0 et qui coïncide avec f hors d'un autre voisinage de 0.

Comment modifier $H = S_{UV}(f)$ en \tilde{H} pour que $g = S_{UV}^{-1}(\tilde{H})$ vérifie les propriétés énoncées ci-dessus.

Un autre exemple : soit f et g deux éléments de $\mathcal{F}(U, V)$. On veut perturber f pour obtenir \tilde{f} tel que \tilde{f} coïncide avec g sur un ouvert inclus dans U .

Comment modifier $H = S_{UV}(f)$ en \tilde{H} pour que $\tilde{f} = S_{UV}^{-1}(\tilde{H})$ coïncide avec g sur cet ouvert.

Aussi est il nécessaire de pouvoir déduire des propriétés vérifiées par un élément H appartenant à $\mathcal{H}(U, V)$, certaines propriétés vérifiées par l'application $S_{UV}^{-1}(H)$ appartenant à $\mathcal{F}(U, V)$ et dont H est la fonction génératrice.

C'est le but de la proposition ci-dessous.

Notons H_0 l'application définie sur \mathbb{R}^2 par $H_0(x, q) = xq$.

PROPOSITION 1.13. — Soit U et V deux ouverts de \mathbb{R}^2 tels que V est un ouvert simplement connexe contenant 0. Soit O un ouvert de V . Notons \overline{O} l'adhérence de O dans V .

- a – Soit $H \in \mathcal{H}(U, V)$ tel que H coïncide avec H_0 sur \overline{O} , alors \overline{O} est inclus dans U et $S_{UV}^{-1}(H)$ coïncide avec l'identité sur \overline{O} .
- b – Soit $H, G \in \mathcal{H}(U, V)$ tels que H et G coïncident sur \overline{O} , alors $(\psi_H)_{|\overline{O}} = (\psi_G)_{|\overline{O}}$ et $S_{UV}^{-1}(H)$ coïncide avec $S_{UV}^{-1}(G)$ sur $\psi_H(\overline{O})$.

Démonstration. —

a – Soit $H \in \mathcal{H}(U, V)$. Posons $h = \Psi_{UV}(H) \in \mathcal{E}(V, U)$ et $f = S_{UV}^{-1}(f) = \Phi_{VU}(h) \in \mathcal{E}(U, V)$. Soit $(x, q) \in O$. Comme O est ouvert et que H coïncide avec H_0 sur O , alors :

$$\frac{\partial H}{\partial q}(x, q) = \frac{\partial H_0}{\partial q}(x, q) = x \text{ et } \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H_0}{\partial x}(x, q) = q.$$

Par conséquent :

$$h(x, q) = \left(\frac{\partial H}{\partial q}(x, q), \frac{\partial H}{\partial x}(x, q) \right) = (x, q).$$

Par continuité de h , on obtient que h coïncide avec l'identité sur \overline{O} . Ainsi pour tout $(x, q) \in \overline{O}$, $\phi_h(x, q) = (x, h_2(x, q)) = (x, q)$. Or h appartenant à $\mathcal{E}(V, U)$, ϕ_h est à valeur dans U . Ainsi :

$$\phi_h(\overline{O}) = \overline{O} \subseteq U.$$

Reste à démontrer que $f = S_{UV}^{-1}(H)$ est égale à l'identité sur \overline{O} . Soit $(x, y) \in \overline{O}$. D'après ce qui précède, on sait que $\phi_h(x, y) = (x, y) = \phi_h^{-1}(x, y)$ et que h coïncide avec l'identité sur \overline{O} . Par conséquent pour tout $(x, y) \in \overline{O}$, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \Phi_{V,U}(h)(x, y) \\ &= (h_1(\phi_h^{-1}(x, y)), (\phi_h^{-1})_2(x, y)) \\ &= (h_1(x, y), y) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

b – Soit $H, G \in \mathcal{H}(U, V)$. Posons $h = \Psi_{UV}(H)$, $g = \Psi_{UV}(G)$ puis $f = S_{UV}^{-1}(H) = \Phi_{V,U}(h)$ et $k = S_{UV}^{-1}(G) = \Phi_{V,U}(g)$. Alors h et g appartiennent à $\mathcal{G}(U, V)$, f et k appartiennent à $\mathcal{F}(U, V)$.

Soit $(x, q) \in O$. Comme O est ouvert et que H coïncide avec G sur O , alors :

$$\frac{\partial H}{\partial q}(x, q) = \frac{\partial G}{\partial q}(x, q) \text{ et } \frac{\partial H}{\partial x}(x, q) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, q).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \psi_H(x, q) &= (x, \frac{\partial H}{\partial x}(x, q)) = (x, \frac{\partial G}{\partial x}(x, q)) = \psi_G(x, q), \\ h(x, q) &= (\frac{\partial H}{\partial q}(x, q), \frac{\partial H}{\partial x}(x, q)) = (\frac{\partial G}{\partial q}(x, q), \frac{\partial G}{\partial x}(x, q)) = g(x, q). \end{aligned}$$

Ainsi, par continuité de h , g , ψ_H et ψ_G sur V , ψ_H et ψ_G d'une part, h et g d'autre part coïncident sur \overline{O} .

Remarquons de plus que $\phi_h = \psi_H$ et $\phi_g = \psi_G$ coïncident sur \overline{O} .

Reste à démontrer que $f = S_{UV}(H)$ est égal à $k = S_{UV}(G)$ sur $\psi_H(\overline{O})$. Soit $(x, y) \in \psi_H(\overline{O}) = \phi_h(\overline{O})$. Les applications $(\phi_h)_{\overline{O}}$ et $(\phi_g)_{\overline{O}}$ coïncidant sur \overline{O} , on obtient que $\phi_h^{-1}(x, y) = \phi_g^{-1}(x, y) \in \overline{O}$. Comme h et g coïncident aussi sur \overline{O} , pour tout $(x, y) \in \psi_H(\overline{O})$, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \Phi_{V,U}(h)(x, y) \\ &= (h_1(\phi_h^{-1}(x, y)), (\phi_h^{-1})_2(x, y)) \\ &= (g_1(\phi_g^{-1}(x, y)), (\phi_g^{-1})_2(x, y)) \\ &= k(x, y). \end{aligned}$$

□

1.3 Fonctions génératrices sur l'anneau

Si dans le paragraphe précédent nous avons tenté de définir rigoureusement la notion de fonction génératrice sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , nous permettant de perturber localement des difféomorphismes

symplectiques d'une surface, dans ce paragraphe nous allons nous occuper de définir la notion de fonction génératrice sur une surface globale en l'occurrence l'anneau. Ceci nous permettra de perturber globalement des difféomorphismes symplectiques de l'anneau.

En fait nous cherchons seulement à perturber des applications bien spécifiques de l'anneau dont nous connaissons une formule explicite (rotations...). Nous n'allons donc pas aller jusqu'à définir une notion de fonction génératrice de l'anneau d'une classe entière d'applications symplectiques de l'anneau comme nous l'avons fait dans le cas d'un ouvert du plan, bien que ceci pourrait être fait sur le même modèle. Nous allons seulement considérer des fonctions génératrices d'applications bien particulières, fonctions génératrices que nous perturberons. Puis nous expliquerons comment passer d'une fonction génératrice vers une application symplectique de l'anneau.

• Préliminaires et notations

On considère l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ muni de la forme symplectique exacte $d\theta \wedge dr$. On note $C^1_\omega(\mathbb{A})$ l'ensemble des applications f de l'anneau de classe C^1 telles que $f^*d\theta \wedge dr = d\theta \wedge dr$. Rappelons que l'application Π est le revêtement universel de l'anneau défini par :

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{A} \\ (\tilde{\theta}, r) &\longmapsto (\theta, r) \end{aligned}$$

où $\theta = \{\tilde{\theta} + n : n \in \mathbb{Z}\}$ est la classe d'équivalence de θ modulo \mathbb{Z} .

Notons \mathcal{A} l'espace d'applications de classe C^1 de \mathbb{R}^2 tel que si $F \in \mathcal{A}$ alors :

$$F^*d\tilde{\theta} \wedge dr = d\tilde{\theta} \wedge dr \text{ et il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } F(\tilde{\theta} + 1, r) = F(\tilde{\theta}, r) + (k, 0), \forall (\tilde{\theta}, r) \in \mathbb{R}^2.$$

Puis $C^1_\omega(\mathbb{A})$ l'ensemble des applications f de classe C^1 de l'anneau telles que $f^*d\theta \wedge dr = d\theta \wedge dr$.

Considérons enfin l'application I définie sur \mathcal{A} à valeurs dans les applications de classe C^1 de l'anneau par :

$$\begin{aligned} I : \mathcal{A} &\longrightarrow C^1(\mathbb{A}) \\ F &\longmapsto f \end{aligned}$$

où f est définie pour tout $(\theta, r) \in \mathbb{A}$ par $f(\theta, r) = \Pi(F(\tilde{\theta}, r))$, $\tilde{\theta}$ étant un représentant de θ .

PROPOSITION 1.14. — *L'application I est une application continue telle que $I(\mathcal{A}) = C^1_\omega(\mathbb{A})$.*

Démonstration. — C'est la notion de relevé d'une fonction continue de l'anneau qui indique que pour toute application f de l'anneau, de classe C^1 il existe F une application de classe C^1 du plan telle que :

$$f \circ \Pi = \Pi \circ F.$$

$$F(\tilde{\theta} + 1, r) = F(\tilde{\theta}, r) + (k, 0), \forall (\tilde{\theta}, r) \in \mathbb{R}^2,$$

Rappelons que $\Pi^*d\theta \wedge dr = d\tilde{\theta} \wedge dr$. Ainsi :

$$F^*d\tilde{\theta} \wedge dr = F^*(\Pi^*d\theta \wedge dr) = (\Pi \circ F)^*d\theta \wedge dr = (f \circ \Pi)^*d\theta \wedge dr = \Pi^*(f^*d\theta \wedge dr).$$

L'application Π étant un difféomorphisme local, nous obtenons l'équivalence suivante :

$$f^*d\theta \wedge dr = d\theta \wedge dr \Leftrightarrow F^*d\tilde{\theta} \wedge dr = d\tilde{\theta} \wedge dr.$$

Ce qui démontre que $I(\mathcal{A}) = C_\omega^1(\mathbb{A})$. □

Si H est une application définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles de classe C^1 , posons :

$$\begin{aligned} \psi_H : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\tilde{\theta}, R) &\longmapsto \left(\tilde{\theta}, \frac{\partial H}{\partial \tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, R) \right) \end{aligned}$$

Notons \mathcal{H} l'ensemble des applications définies sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles de classe C^2 tel que $H \in \mathcal{H}$ si et seulement si ψ_H est un difféomorphisme et s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$H(\tilde{\theta} + 1, R) = H(\tilde{\theta}, R) + kR, \quad \forall (\tilde{\theta}, R) \in \mathbb{R}^2.$$

Puis considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} J : \quad \mathcal{H} &\longrightarrow C^1(\mathbb{R}^2) \\ H &\longmapsto F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\tilde{\theta}, r) &\mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\psi_H^{-1}(\tilde{\theta}, r)), (\psi_H^{-1})_2(\tilde{\theta}, r) \right) \end{cases} \end{aligned}$$

• **Définition d'une fonction génératrice d'une application symplectique de l'anneau**

Voici tout d'abord une propriété vérifiée par J :

PROPOSITION 1.15. — *L'application J définie sur \mathcal{H} , est continue et à valeurs dans \mathcal{A} .*

De cette proposition dont nous donnons une preuve à la fin de ce paragraphe, nous déduisons facilement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.16. — *L'application $I \circ J$ définie sur \mathcal{H} , est continue à valeurs dans $C_\omega^1(\mathbb{A})$.*

REMARQUE 1.17. — Si $H \in \mathcal{H}$ et si $f = I \circ J(H) \in C_\omega^1(\mathbb{A})$, alors $(\Pi \circ \psi_H)^*(f_1 df_2 + r d\theta) = dH$. De plus, si F est un relevé de f , nous avons la relation vérifiée par F et H :

$$F(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\Theta}, R) \implies r = \frac{\partial H}{\partial \tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, R) \text{ et } \tilde{\Theta} = \frac{\partial H}{\partial R}(\tilde{\theta}, R).$$

DÉFINITION 1.18. — *Soit $f \in C_\omega^1(\mathbb{A})$. S'il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $I \circ J(H) = f$ on dit que H est une **fonction génératrice** de f .*

Soit f une application symplectique de l'anneau possédant une fonction génératrice H . Comme dans le paragraphe précédent nous allons perturber H : on construit \tilde{H} dans un voisinage de H en topologie C^2 tout en s'assurant que \tilde{H} appartient à \mathcal{H} . Le principal problème est de s'assurer que $\psi_{\tilde{H}}$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 , ce qui est vérifié si \tilde{H} est suffisamment près de H , l'ensemble $\text{Diff}^2(\mathbb{R}^2)$ étant un ouvert de $C^2(\mathbb{R}^2)$ pour la topologie C^2 forte de Whitney.

Puis on pose $\tilde{f} = I \circ J(\tilde{H})$ qui appartient à $C_\omega^1(\mathbb{A})$.

L'application $I \circ J$ étant continue, si \tilde{H} a été construit suffisamment près de H , l'application \tilde{f} se trouve alors dans un voisinage arbitrairement petit de f .

Donnons à présent une preuve de la proposition 1.15.

Preuve de la proposition 1.15. — Pour montrer que J est continue, considérons les applications :

$$\begin{aligned} \beta_1 : \mathcal{H} &\longrightarrow \text{Diff}^1(\mathbb{R}^2) \\ H &\longmapsto \psi_H \\ \\ \beta_2 : \mathcal{H} &\longrightarrow C^1(\mathbb{R}^2) \\ H &\longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\tilde{\theta}, R) \mapsto (\frac{\partial H}{\partial R}(\tilde{\theta}, R), R) \end{array} \right. \\ \\ \beta_3 : C^1(\mathbb{R}^2) \times \text{Diff}^1(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow C^1(\mathbb{R}^2) \\ (u, v) &\longmapsto u \circ v^{-1} \end{aligned}$$

Or d'une part, $J(H) = \beta_3(\beta_2(H), \beta_1(H))$ quelque soit $H \in \mathcal{H}$. D'autre part, β_1 , β_2 et β_3 sont continues tous les espaces d'applications considérés étant munis des topologies induites par la topologie de Whitney (cf §1.1 sur la topologie de Whitney). L'application J est donc bien continue.

Reste à vérifier que si $H \in \mathcal{H}$ alors $F = J(H)$ appartient à \mathcal{A} .

1. F est une application du plan de classe C^1 .
2. Comme $H \in \mathcal{H}$ il existe un entier k tel que pour tout $(\tilde{\theta}, R) \in \mathbb{R}^2$:

$$H(\tilde{\theta} + 1, R) = H(\tilde{\theta}, R) + kR.$$

Ce qui implique très facilement que :

$$F(\tilde{\theta} + 1, r) = F(\tilde{\theta}, r) + (k, 0).$$

3. Comme $\psi_H(\tilde{\theta}, R) = (\tilde{\theta}, \frac{\partial H}{\partial \tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, R))$ et $F \circ \psi_H(\tilde{\theta}, R) = (\frac{\partial H}{\partial R}(\tilde{\theta}, R), R)$, on en déduit que :

$$\psi_H^*(F_1 dF_2 + r d\tilde{\theta}) = \frac{\partial H}{\partial R} dR + \frac{\partial H}{\partial \tilde{\theta}} d\tilde{\theta} = dH.$$

Donc :

$$F_1 dF_2 + r d\tilde{\theta} \text{ est une 1 forme fermée.}$$

Par conséquent :

$$dF_1 \wedge dF_2 = d\tilde{\theta} \wedge dr.$$

L'application F appartient donc à \mathcal{A} . Ce qui implique que l'application J est à valeurs dans \mathcal{A} . ■

Comme dans le cas d'une perturbation locale (cf. la proposition 1.13), il est utile de pouvoir déduire de certaines propriétés d'un élément H appartenant à \mathcal{H} , les propriétés de l'application $I \circ J(H)$ dont, par définition, H est la fonction génératrice.

PROPOSITION 1.19. — Soit O un ouvert de \mathbb{R} . Notons \overline{O} l'adhérence de O .

Soit $H, G \in \mathcal{H}$, tel que H et G coïncident sur $\mathbb{R} \times \overline{O}$ alors $(\psi_H)|_{\mathbb{R} \times \overline{O}} = (\psi_G)|_{\mathbb{R} \times \overline{O}}$ et $I \circ J(H)$ coïncide avec $I \circ J(G)$ sur $\psi_H(\mathbb{R} \times \overline{O})$.

La démonstration de ce lemme est tout à fait similaire à la preuve de la proposition 1.13. \blacksquare

Donnons à présent quelques exemples d'applications symplectiques de l'anneau qui admettent une fonction génératrice. Ces exemples seront utiles dans le prochain paragraphe lorsque il s'agira de perturber une rotation de l'anneau...

EXEMPLE 1.20. — A propos des rotations de l'anneau :

Soit $\alpha \in \mathbb{T}^1$ et $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ un relevé de α . Considérons les deux applications :

$$\begin{aligned} \rho_\alpha : \quad \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{A} \\ (\theta, r) &\mapsto (\theta + \alpha, r) \text{ qui est la rotation de l'anneau d'angle } \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\tilde{\alpha}} : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{\theta}, R) &\mapsto (\tilde{\theta} + \tilde{\alpha})R. \end{aligned}$$

Alors $\psi_{H_{\tilde{\alpha}}}(\tilde{\theta}, R) = (\tilde{\theta}, R)$, quelque soit $(\tilde{\theta}, R) \in \mathbb{R}^2$. Donc $\psi_{H_{\tilde{\alpha}}}$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 . De plus pour tout $(\tilde{\theta}, R) \in \mathbb{R}^2$, $H_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\theta} + 1, R) = \tilde{H}_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\theta}, R) + R$. Par conséquent :

$$H_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{H}.$$

Et il est facile de vérifier que $J(H_{\tilde{\alpha}})(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\theta} + \tilde{\alpha}, r)$, pour tout $(\tilde{\theta}, r) \in \mathbb{R}^2$ puis que $I \circ J(H_{\tilde{\alpha}}) = \rho_\alpha$. Ce qui signifie que $H_{\tilde{\alpha}}$ est une fonction génératrice de la rotation d'angle α de l'anneau.

EXEMPLE 1.21. — Une généralisation de l'exemple précédent :

Soit g une application de classe C^2 du cercle telle que $g'(\theta) \neq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$. Considérons $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$ un relevé de g . Soit $r_0 \in \mathbb{R}$. Considérons les applications :

$$\begin{aligned} \rho_g : \quad \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{A} \\ (\theta, r) &\mapsto (g(\theta), \frac{r - r_0}{g'(\theta)} + r_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\tilde{g}} : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{\theta}, R) &\mapsto r_0(\tilde{\theta} + \tilde{g}(0) - \tilde{g}(\tilde{\theta})) + R\tilde{g}(\tilde{\theta}). \end{aligned}$$

Alors $\psi_{H_{\tilde{g}}}(\tilde{\theta}, R) = (\tilde{\theta}, (R - r_0)\tilde{g}'(\tilde{\theta}) + r_0)$, pour tout $(\tilde{\theta}, R) \in \mathbb{R}^2$. Or $\tilde{g}'(\tilde{\theta}) \neq 0$ car g est un difféomorphisme du cercle. Donc, $\psi_{H_{\tilde{g}}}$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 d'inverse :

$$\begin{aligned} \psi_{H_{\tilde{g}}}^{-1} : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\tilde{\theta}, r) &\mapsto (\tilde{\theta}, \frac{r - r_0}{\tilde{g}'(\tilde{\theta})} + r_0). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}(\tilde{\theta} + 1) = \tilde{g}(\tilde{\theta}) + 1$. On obtient ainsi que pour tout $(\tilde{\theta}, r) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} H_{\tilde{g}}(\tilde{\theta} + 1, R) &= r_0(\tilde{\theta} + 1 + \tilde{g}(0) - \tilde{g}(\tilde{\theta} + 1)) + R\tilde{g}(\tilde{\theta} + 1) \\ &= r_0(\tilde{\theta} + 1 + \tilde{g}(0) - \tilde{g}(\tilde{\theta}) - 1) + R(\tilde{g}(\tilde{\theta}) + 1) \\ &= H_{\tilde{g}}(\tilde{\theta}, R) + R. \end{aligned}$$

Par conséquent $H_{\tilde{g}} \in \mathcal{H}$. De plus pour tout $(\tilde{\theta}, R) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial H}{\partial R}(\tilde{\theta}, R) = \tilde{g}(\tilde{\theta})$. Ainsi :

$$\begin{aligned} J(H_{\tilde{g}})(\tilde{\theta}, r) &= \left(\frac{\partial H}{\partial R}(\psi_H^{-1}(\tilde{\theta}, r)), (\psi_H^{-1})_2(\tilde{\theta}, r) \right) \\ &= \left(\tilde{g}(\tilde{\theta}), \frac{r - r_0}{\tilde{g}'(\tilde{\theta})} + r_0 \right). \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que $I \circ J(H_{\tilde{g}}) = \rho_g$. Ce qui signifie que $H_{\tilde{g}}$ est une fonction génératrice de l'application ρ_g .

Remarquons que :

$$(\rho_g)|_{\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}}(\theta, r) = (g(\theta), r_0),$$

en particulier, $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$ est un cercle invariant par ρ_g .

Cet exemple généralise l'exemple précédent. En effet, si l'on note R_α la rotation d'angle α sur le cercle, on obtient que $\rho_{R_\alpha} = \rho_\alpha$ et que $H_{\tilde{\alpha}} = H_{\tilde{R}_\alpha}$.

2 Perturber un difféomorphisme symplectique d'une surface au voisinage d'un point

Soit (M, ω) une surface symplectique.

2.1 Linéariser une application symplectique d'une surface au voisinage d'un point périodique

Soit $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et p un point k périodique pour f .

L'application tangente de f^k en p , notée $Df^k(p)$, est alors un endomorphisme de T_pM . Intuitivement, f^k est "proche" de $Df^k(p)$ dans un voisinage de p (évidemment cela a peu de sens et doit être précisé puisque f^k et $Df^k(p)$ ne sont même pas définis sur le même espace!).

En fait, il est possible de trouver g^k dans un voisinage arbitrairement petit de f , en topologie C^1 , tel que g soit conjugué à $Df^k(p)$ sur un voisinage de p et que g coïncide avec f hors d'un autre voisinage de p .

Notation : $C_\omega^1(M) = \{f : M \rightarrow M \text{ de classe } C^1 \text{ tel que } f^*\omega = \omega\}$.

Voici la proposition que nous nous proposons de montrer :

PROPOSITION 2.1. — *Soit (M, ω) une surface symplectique, $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in M$ un point périodique de période k pour f .*

Soit U un voisinage de f dans $C_\omega^1(M)$, V un voisinage de p dans M .

Il existe alors W un ouvert de M contenant p et $g \in W$ tels que :

- $W \subseteq U$,
- $g = f$ sur $M \setminus V$,
- g^k est conjuguée à $Df^k(p)$ sur V .

Plus précisément, il existe W_1 un voisinage de p contenant V , W_2 un voisinage de 0 dans T_pM , $\phi : W_1 \rightarrow W_2$ un difféomorphisme de classe C^1 tel que :

- $\phi(p) = 0$ et $\phi^*\omega_p = \omega$,
- $Df^k(p)(\phi(V)) \subseteq W_2$,
- $g^k = \phi^{-1} \circ Df^k(p) \circ \phi$ sur V (ainsi p est un point périodique de période k pour g).

Avant de donner une démonstration complète de cette proposition, nous allons simplifier le problème en considérant une application de classe C^1 définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^2 , qui préserve la 2 forme $dx \wedge dy$, qui fixe 0 et dont l'application différentielle $Dh(0)$ est l'identité de \mathbb{R}^2 .

Ceci est un cas particulier de la proposition énoncée ci-dessus. Nous montrerons ainsi la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2. — Soit M un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant 0 et $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 préservant $dx \wedge dy$, telle que $f(0) = 0$, $Df(0) = Id$.
Soit \mathcal{U} un voisinage de f dans $C^1(M, \mathbb{R}^2)$.

Il existe alors $r > 0$, O un ouvert de \mathbb{R}^2 et $g \in \mathcal{U}$ préservant $dx \wedge dy$ tels que :

- $\overline{B(0, r)} \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq M$,
- $g = f$ sur $M \setminus O$,
- $g = id$ sur $\overline{B(0, r)}$.

De cette proposition, nous en déduisons aussitôt un corollaire. Considérons deux surfaces symplectiques ainsi que deux applications de classe C^1 définies toutes les deux sur des ouverts de la même surface à valeurs dans l'autre surface. Supposons que ces deux applications coïncident en un point p et que les différentielles en ce point sont égales. Nous pouvons alors au voisinage de p remplacer l'une par l'autre...

PROPOSITION 2.3. — Soit (M, α) et (N, β) deux surfaces symplectiques, $p \in M$ et U un voisinage de p dans M . Considérons $f_1 \in C^1(M, N)$ et $f_2 \in C^1(U, N)$ telles que :

- $f_1^* \beta = \alpha$, $f_2^* \beta = \alpha$,
- f_2 est un difféomorphisme sur son image,
- $f_1(p) = f_2(p)$ et $Df_1(p) = Df_2(p)$.

Soit \mathcal{U} un voisinage de f_1 dans $C^1(M, N)$. Il existe alors V un ouvert de M contenant p et g une application appartenant à \mathcal{U} tels que :

- $g^* \beta = \alpha$.
- $V \subseteq U$,
- $g = f_2$ sur V et $g = f_1$ sur $M \setminus U$.

Pour montrer cette proposition, il faut considérer l'application $f_2^{-1} \circ f_1$ définie au voisinage de 0. Cette application admet p comme point fixe et sa différentielle en p est égale à l'identité de $T_p M$. Il s'agit alors d'appliquer dans une carte de M en p , la proposition 2.2

C'est ce résultat qui sert de pivot à la démonstration de la proposition 2.1. Nous travaillerons alors au voisinage de $f^{k-1}(p)$.

Si nous étions dans \mathbb{R}^2 , nous considèrerions les deux applications f et $L \circ f^{1-k}$ (où $L : x \in \mathbb{R}^2 \rightarrow p + Df^k(p)(x - p)$).

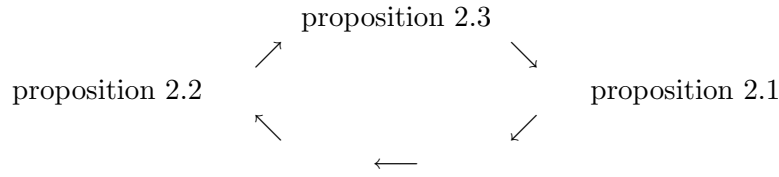
Ces deux applications coïncident en $f^{k-1}(p)$ et admettent $Df(f^{k-1}(p))$ comme différentielle en $f^{k-1}(p)$.

La proposition 2.3 s'applique et permet de remplacer l'application f au voisinage de $f^{k-1}(p)$, par l'application $L \circ f^{1-k}$.

A condition d'avoir perturbé sur un voisinage de $f^{k-1}(p)$ suffisamment petit (c'est-à-dire si l'application g obtenue coïncide avec f sur des voisinages de $p, \dots, f^{k-2}(p)$ et coïncide avec $L \circ f^{1-k}$ sur un voisinage de $f^{k-1}(p)$) l'application g^k est égale à L sur un voisinage de p . Ainsi g^k coïncide avec $\phi^{-1} \circ Df^k(p) \circ \phi$ sur un voisinage de p , ϕ étant l'application définie par $\phi(u) = u - p$ pour tout $u \in \mathbb{R}^2$.

Evidemment, sur une surface symplectique, il s'agit de lire en carte au voisinage de $p...$

Voici donc l'enchaînement logique des trois propositions énoncées ci-dessus :



Preuve de la proposition 2.2. — Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$, $Df(0) = \text{Id}$ et $f^*dx \wedge dy = dx \wedge dy$.

Soit \mathcal{U} un voisinage de f dans $C^1(M, \mathbb{R}^2)$.

Plan de la preuve

Nous allons utiliser le formalisme des fonctions génératrices développé au paragraphe 1.2 de ce chapitre pour perturber f au voisinage de 0.

Pour cela, nous allons chercher U un voisinage de 0 relativement compact, V une boule de \mathbb{R}^2 contenant 0 tels que $f|_U \in \mathcal{F}(U, V)$.

Puis, on considérera $H = S_{UV}(f|_U)$ la fonction génératrice de $f|_U$.

Il s'agira de construire $\tilde{H} \in \mathcal{H}(U, V)$ dans un voisinage convenable de H et $r > 0$ tels que :

- $\overline{B(0, 2r)} \subseteq V$,
- $\tilde{H} = H_0$ sur $\overline{B(0, r)}$, (*rappelons que $H_0(x, q) = xq$, $\forall (x, q) \in \mathbb{R}^2$*)
- $\tilde{H} = H$ hors de $B(0, 2r)$.

Nous poserons $\tilde{f} = S_{UV}(\tilde{H}) \in \mathcal{F}_{UV} \subseteq C^1(U, \mathbb{R}^2)$ et $O = \psi_{\tilde{H}}(B(0, 2r))$.

D'après la proposition 1.13, $\tilde{f} = \text{id}$ sur $\overline{B(0, r)}$ et $\tilde{f} = f$ hors de O .

On prolongera alors \tilde{f} en une application de classe C^1 définie sur M tout entier en posant :

$$g : M \longrightarrow \mathbb{R} \\
 x \longmapsto \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{si } x \in U \\ f(x) & \text{si } x \notin U \end{cases} .$$

Comment s'assurer alors que g appartient à \mathcal{U} ?

Pour cela il suffira d'avoir construit \mathcal{U}' un voisinage de $f|_U$ tel que si $h \in C^1(M, \mathbb{R}^2)$ vérifie :

- $$\left. \begin{array}{l} - h|_U \in \mathcal{U}', \\ - h \text{ est de classe } C^1 \\ - h = f \text{ hors de } U \end{array} \right\} \text{ alors } h \in \mathcal{U}.$$

On considérera alors $\mathcal{V} = S_{UV}^{-1}(\mathcal{U}' \cap \mathcal{F}_{UV})$ voisinage de H dans $\mathcal{H}(U, V)$.

Le voisinage convenable de H dans lequel il faudra construire H est alors \mathcal{V} , puisque alors \tilde{f} appartiendra à \mathcal{U}' et par conséquent g appartiendra à \mathcal{U} .

Considérons donc :

$$\begin{aligned} \phi : \quad M &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, f_2(x, y)). \end{aligned}$$

L'application ϕ est de classe C^1 . De plus $\phi(0) = 0$ et $D\phi(0) = \text{Id}$. D'après le théorème d'inversion locale, il existe U un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant 0 , V une boule ouverte de \mathbb{R}^2 contenant 0 de rayon η tels que $\phi|_U$ est un C^1 difféomorphisme de U sur V .

Ainsi $f|_U$ appartient à $\mathcal{E}(U, V)$. Or f préserve la forme $dx \wedge dy$, donc :

$$f|_U \in \mathcal{F}(U, V).$$

On note $S_{UV} = S$. Posons :

$$H = S(f|_U) \in \mathcal{H}(U, V).$$

C'est avec H que nous allons travailler pour construire, à partir de H et H_0 une application \tilde{H} suffisamment proche de H et $r > 0$ de telle sorte que \tilde{H} coïncide avec H_0 sur $B(0, r)$ et avec H hors de $B(0, 2r)$.

L'idée est d'utiliser une fonction plateau P qui vaut 1 sur $B(0, r)$ et 0 hors de $B(0, 2r)$: on pose alors $\tilde{H} = PH_0 + (1 - P)H$.

Il s'agit de prendre $r > 0$ suffisamment petit pour que \tilde{H} soit proche de H en topologie C^2 sur $C^2(V, \mathbb{R})$, et pour que $\tilde{H} \in \mathcal{H}(U, V)$.

Comme \mathcal{U} est un voisinage de f dans $C^1(U, \mathbb{R}^2)$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\{g \in C^1(M, \mathbb{R}^2), g = f \text{ hors de } U, \text{ et } \|g - f\|_{C^1, M} < \alpha\} \subseteq \mathcal{U}.$$

Posons :

$$\mathcal{U}' = \{g \in C^1(U, \mathbb{R}^2), \|g - f\|_{C^1, U} < \alpha\}.$$

L'ensemble \mathcal{U}' est alors un voisinage de $f|_U$ dans $C^1(U, \mathbb{R}^2)$ tel que si $g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifient :

$$\left. \begin{array}{l} - g|_U \in \mathcal{U}', \\ - g \text{ est de classe } C^1 \\ - g = f \text{ hors de } U \end{array} \right\} \text{ alors } g \in \mathcal{U}.$$

Posons :

$$\mathcal{V} = S(\mathcal{U}' \cap \mathcal{F}(U, V)).$$

D'après le corollaire 1.9, S est un homéomorphisme de $\mathcal{F}(U, V)$ sur $\mathcal{H}(U, V)$. Ainsi \mathcal{V} est un voisinage de H dans $\mathcal{H}(U, V)$. C'est dans ce voisinage de H que nous allons chercher \tilde{H} ...

LEMME 2.4. — Il existe $r \in]0; \frac{\eta}{2}[$ et $\tilde{H} \in \mathcal{V}$ tel que $\tilde{H}(x, q) = H_0(x, q)$ sur $\overline{B(0, r)}$ et $\tilde{H}(x, q) = H(x, q)$ sur $V \setminus B(0, 2r)$.

Terminons la preuve de la proposition 2.2 avant de donner une preuve de ce lemme.

Soit $\tilde{H} \in \mathcal{V}$ et $r > 0$ donnés par le lemme 2.4. Posons :

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= S^{-1}(\tilde{H}) \in \mathcal{F}(U, V), \\ O &= \psi_{\tilde{H}}(B(0, 2r)).\end{aligned}$$

Puis :

$$g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto \begin{cases} \tilde{f}(u) & \text{si } u \in U \\ f(u) & \text{si } u \notin U \end{cases}$$

Montrons que r , O et g ainsi définis, vérifient les conclusions de la proposition...

— L'application \tilde{H} coïncide avec H_0 sur $\overline{B(0, r)}$. Donc d'après la proposition 1.13-a, $\psi_H = \text{id}$ sur $\overline{B(0, r)}$, ainsi $\overline{B(0, r)} = \psi_H(\overline{B(0, r)})$, et :

$$\overline{B(0, r)} \subseteq \psi_H(B(0, 2r)) = O.$$

De plus $r < \eta/2$ et V est la boule de centre 0 et de rayon η , donc $\overline{B(0, 2r)}$ est inclus dans V . Ainsi $\psi_H(\overline{B(0, 2r)}) \subseteq \psi_H(V) = U$.

Or, ψ_H est un homéomorphisme de V sur U . Donc $\overline{\psi_H(B(0, 2r))} = \psi_H(\overline{B(0, 2r)})$. Par conséquent :

$$\overline{O} = \overline{\psi_H(B(0, 2r))} \subseteq U.$$

— L'application \tilde{H} coïncide avec H sur $V \setminus B(0, 2r)$. Donc d'après la proposition 1.13-b, $\tilde{f} = f$ sur $U \setminus \psi_H(B(0, 2r)) = U \setminus O$. Or par définition de g , $g = \tilde{f}$ sur U . Par conséquent, $g = f$ sur $U \setminus O$. $g = f$ sur $M \setminus U$. Donc :

$$g = f \text{ sur } M \setminus O.$$

— L'application \tilde{H} coïncide avec H_0 sur $\overline{B(0, r)}$. Donc d'après la proposition 1.13-a, $\tilde{f} = \text{id}$ sur $\overline{B(0, r)}$. Or $B(0, r) \subseteq U$ et $f = \tilde{f}$ sur U . Donc :

$$g = \text{id sur } \overline{B(0, r)}.$$

— L'application g est de classe C^1 car elle l'est sur les deux ouverts $M \setminus \overline{O}$ et U dont la réunion est M tout entier puisque $\overline{O} \subseteq U$. En effet $g = f$ sur $M \setminus \overline{O}$ et $g = \tilde{f}$ sur U .

— Démontrons que $g \in \mathcal{U}$. D'une part, $\tilde{H} \in \mathcal{V}$ donc $\tilde{f} = S^{-1}(\tilde{H}) \in \mathcal{U}'$. Par conséquent, $\tilde{g}|_U \in \mathcal{U}'$. D'autre part, g est de classe C^1 et $g = f$ hors de U . Ainsi par construction de \mathcal{U}' :

$$g \in \mathcal{U}.$$

— Reste à démontrer que $g^*dx \wedge dy = dx \wedge dy$. D'une part, $g|_U = \tilde{f} \in \mathcal{F}(U, V)$, donc $g^*_U dx \wedge dy = dx \wedge dy$. D'autre part, $g = f$ sur $M \setminus U$ et $f^*dx \wedge dy = dx \wedge dy$. Donc :

$$g^*dx \wedge dy = dx \wedge dy.$$

Pour avoir achevé la preuve de cette proposition, nous devons donner la preuve du lemme 2.4.

Preuve du lemme 2.4. — Rappelons que V est la boule de centre 0 et de rayon η .

Pour tout $a > 0$, notons $K(a)$ l'ensemble des applications $G \in C^2(V, \mathbb{R})$ tel que $G(0) = 0$, $G = H$ sur $V \setminus B(0, \frac{\eta}{2})$ et tel que

$$\|G - H\|_{C^2, B(0, \frac{\eta}{2})} < a.$$

SOUS LEMME 2.5. — Il existe $\beta > 0$ tel que $K(\beta) \subseteq \mathcal{V}$.

Preuve du sous lemme 2.5. — Comme \mathcal{V} est un voisinage de H dans $\mathcal{H}(U, V)$, par définition de la topologie C^2 , il existe $\beta_1 > 0$, tel que :

$$K(\beta_1) \cap \mathcal{H}(U, V) \subseteq \mathcal{V}.$$

Montrons qu'il existe $\beta_2 > 0$, tel que :

$$K(\beta_2) \subseteq \mathcal{H}(U, V).$$

Rappelons ce que veut dire "être dans $\mathcal{H}(U, V)$ " :

$G \in \mathcal{H}(U, V) \iff G(0) = 0$ et $\psi_G : (x, q) \in V \mapsto (x, \frac{\partial G}{\partial x}(x, q))$ est un difféomorphisme de V sur U .

Quelque soit $a > 0$, si $G \in K(a)$ alors $G(0) = 0$. Il s'agit donc de trouver β_2 suffisamment petit de telle sorte que si $G \in K(\beta_2)$ alors ψ_G est un difféomorphisme de classe C^1 de V sur U .

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \Gamma : C^2(V, \mathbb{R}) &\longrightarrow C^1(V, \mathbb{R}^2) \\ G &\longmapsto \psi_G \end{aligned}$$

Les espaces de fonctions considérés étant munis de la topologie C^1 forte de Whitney, l'application Γ est continue. De plus, $\Gamma(H) = \psi_H$.

Or, ψ_H est un difféomorphisme de V sur U . Ainsi, par la proposition 1.4, il existe \mathcal{W}_1 un voisinage de ψ_H dans $C^1(V, \mathbb{R}^2)$, tel que si :

- $\psi \in \mathcal{W}_1$,
- $\psi = \psi_H$ hors de $\overline{B(0, \frac{\eta}{2})}$,

alors ψ est un C^1 difféomorphisme de V sur U .

L'application Γ étant continue, il existe \mathcal{W}_2 un voisinage de H dans $C^2(V, \mathbb{R})$ tel que :

$$\Gamma(\mathcal{W}_2) \subseteq \mathcal{W}_1.$$

L'ensemble \mathcal{W}_2 étant un voisinage de H dans $C^2(V, \mathbb{R})$ muni de la topologie C^2 , il existe $\beta_2 > 0$ tel que $K(\beta_2) \subseteq \mathcal{W}_2$.

Vérifions que $K(\beta_2) \subseteq \mathcal{H}(U, V)$.

Soit $G \in K(\beta_2)$, alors :

- $G(0) = 0$,

- l'application ψ_G est un difféomorphisme de V sur U car :
 - d'une part $\psi_G \in \mathcal{W}_1$ puisque $\psi_G = \Lambda(G) \in \Lambda(K(\beta_2)) \subseteq \Lambda(\mathcal{W}_2) \subseteq \mathcal{W}_1$,
 - d'autre part, $\psi_G = \psi_H$ sur $V \setminus B(0, \frac{\eta}{2})$ car $G = H$ sur $V \setminus B(0, \frac{\eta}{2})$ (cf la définition de $K(\beta_2)$).

Donc $G \in \mathcal{H}(U, V)$. Par conséquent :

$$K(\beta_2) \subseteq \mathcal{H}(U, V).$$

Posons $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$. Nous obtenons que :

$$K(\beta) \subseteq \mathcal{V}.$$

■

Pour finir de démontrer le lemme 2.4, nous allons chercher \tilde{H} dans $K(\beta)$, puisque $K(\beta)$ est inclus dans \mathcal{V} ...

Soit $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0; 1]$ une fonction plateau de classe C^∞ telle que :

$$\begin{cases} P(u) = 1 & \text{si } \|u\| \leq \frac{1}{2} \\ P(u) = 0 & \text{si } \|u\| \geq 1 \end{cases}$$

Posons $M = \sup_{X \in \mathbb{R}^2} \|DP(X)\|$ et $N = \sup_{X \in \mathbb{R}^2} \|D^2P(X)\|$.

D'une part $H(0) = H_0(0) = 0$ et $DH(0) = DH_0(0) = 0$. D'autre part, pour tout (u, v) dans \mathbb{R}^2 ,

$$D^2H(0)(u, v) = D^2H_0(0)(u, v) = (v, u).$$

De plus, H et H_0 sont de classe C^2 . Il existe donc ν strictement compris entre 0 et $\frac{\eta}{2}$ tel :

$$\|H - H_0\|_{C^2, \overline{B(0, \nu)}} < \frac{\beta}{2M + N + 1}.$$

Posons $r = \frac{\nu}{2}$ puis :

$$\begin{aligned} \tilde{H} : \quad V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, q) &\longmapsto P\left(\frac{(x, q)}{\nu}\right)H_0(x, q) + \left(1 - P\left(\frac{(x, q)}{\nu}\right)\right)H(x, q) \end{aligned}$$

Montrons que r et \tilde{H} conviennent :

- \tilde{H} est de classe C^2 car H et H_0 le sont.
- $P\left(\frac{(x, q)}{\nu}\right) = 0$ si $\|(x, q)\| > \nu$. Donc $\tilde{H} = H$ hors de $B(0, \nu) = B(0, 2r)$.
- $P\left(\frac{(x, q)}{\nu}\right) = 1$ si $\|(x, q)\| \leq \frac{\nu}{2}$. Donc $\tilde{H} = H_0$ sur $\overline{B(0, \frac{\nu}{2})} = \overline{B(0, r)}$.
- Reste à démontrer que \tilde{H} appartient à \mathcal{V} . Pour cela vérifions que \tilde{H} appartient à $K(\beta)$:
 - ★ $\tilde{H}(0) = H_0(0) = 0$.

★ $\tilde{H} = H$ sur $V \setminus B(0, \nu)$ et $\nu < \frac{\eta}{2}$. Donc :

$$H = \tilde{H} \text{ sur } V \setminus B(0, \eta).$$

★ $H = \tilde{H}$ sur $V \setminus B(0, \nu)$. Donc $H = \tilde{H}$ sur $B(0, \frac{\eta}{2}) \setminus B(0, \nu)$. Ainsi :

$$\|\tilde{H} - H\|_{C^2, B(0, \frac{\eta}{2})} = \|\tilde{H} - H\|_{C^2, B(0, \nu)}.$$

Soit $X = (x, q) \in B(0, \nu)$,

$$\tilde{H}(x, q) - H(x, q) = P\left(\frac{(x, q)}{\nu}\right)(H_0(x, q) - H(x, q)).$$

Donc :

$$\begin{aligned} (D\tilde{H}(x, q) - DH(x, q))(v) &= \frac{1}{\nu}(H_0(x, q) - H(x, q))DP\left(\frac{(x, q)}{\nu}\right)(v) \\ &+ P\left(\frac{(x, q)}{\nu}\right)(DH_0(x, q) - DH(x, q))(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D^2\tilde{H}(X) - D^2H(X))(v, w) &= \frac{1}{\nu^2}(H_0(X) - H(X))D^2P\left(\frac{X}{\nu}\right)(v, w) \\ &+ \frac{1}{\nu}DP\left(\frac{X}{\nu}\right)(v)(DH_0(X) - DH(X))(w) \\ &+ \frac{1}{\nu}DP\left(\frac{X}{\nu}\right)(w)(DH_0(X) - DH(X))(v) \\ &+ P\left(\frac{X}{\nu}\right)(D^2H_0(X) - D^2H(X))(v, w) \end{aligned}$$

En appliquant deux fois le théorème des accroissements finis, on obtient :

$$\|\tilde{H} - H\|_{C^2, B(0, \nu)} < \beta.$$

Donc $\tilde{H} \in K(\beta)$. Ainsi $\tilde{H} \in \mathcal{V}$. ■

□

Preuve de la proposition 2.3 — Soit $p \in M$, $f_1 \in C^1(M, N)$ et $f_2 \in C^1(U, N)$ tels que $f_1^*\beta = \alpha$, $f_2^*\beta = \alpha$, $f_2 : U \rightarrow f_2(U)$ est un difféomorphisme, $f_1(p) = f_2(p)$ et $Df_1(p) = Df_2(p)$.

Soit \mathcal{U} un voisinage de f_1 dans $C^1(M, N)$.

Appliquons le théorème de Darboux (proposition 0.1 du chapitre 1) : soit (W, k) une carte de N en p telle que $k^*dx \wedge dy = \beta$. Quitte à faire une translation, on peut supposer que $k(p) = 0$. On suppose de plus que W est inclus dans U .

Plan de la preuve

Nous allons utiliser la proposition 2.2.

Pour cela, nous allons considérer l'application $\phi = k \circ f_2^{-1} \circ f_1 \circ k^{-1}$ définie sur un ouvert $k(O)$ de \mathbb{R}^2 , contenant 0 et contenu dans $k(W)$.

On vérifie alors que $\phi(0) = 0$, $D\phi(0) = \text{Id}$ et $\phi^* dx \wedge dy = dx \wedge dy$.

On applique alors la proposition 2.2 à ϕ . On construit $\tilde{\phi}$ définie sur $k(O)$, V_1 et V_2 deux ouverts de \mathbb{R}^2 contenant 0 tels que :

- $\overline{V_1} \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq k(O)$,
- $\tilde{\phi} = \text{id}$ sur $\overline{V_1}$,
- $\tilde{\phi} = \phi$ sur $M \setminus V_2$.

Posons alors $V = k^{-1}(V_1)$, puis :

$$g : M \longrightarrow N$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f_2 \circ k^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ k(x) & \text{si } x \in O \\ f_1(x) & \text{si } x \notin O \end{cases} .$$

A condition que g soit bien définie(!), on obtient :

- $V = k^{-1}(V_1) \subseteq U$,
- $g = f_2$ sur \overline{V} car $\tilde{\phi} = \text{id}$ sur $\overline{V_1} = k(V)$,
- $g = f_1$ hors de O qui est inclus dans U ,
- $g^* \beta = \alpha$.

L'application g correspond bien à l'application cherchée.

Encore faut il que cette application g soit bien définie (pour cela il "suffit" de s'assurer que $\tilde{\phi}(k(O)) \subseteq k(W)$) et qu'elle appartienne à \mathcal{U} . Aussi allons nous construire $\tilde{\phi}$ dans un voisinage de ϕ convenable.

Comme f_2 est un difféomorphisme sur son image et que W est un voisinage de p inclus dans U , $f_2(W)$ est un voisinage de $f_2(p) = f_1(p)$. Or f_1 est continue en p . Il existe donc $O \subseteq W$ un ouvert relativement compact de M contenant p tel que :

$$f_1(\overline{O}) \subseteq f_2(W).$$

Considérons :

$$\phi : k(O) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \longmapsto k \circ f_2^{-1} \circ f_1 \circ k^{-1}(x)$$

L'application ϕ est une application de classe C^1 car f_1 , f_2^{-1} , k et k^{-1} le sont (f_2 est un difféomorphisme de classe C^1 sur son image). Vérifions que ϕ vérifie les hypothèses de la proposition 2.2 :

- $\phi(0) = k \circ f_2^{-1} \circ f_1 \circ k^{-1}(0) = k \circ f_2^{-1} \circ f_1(p) = k(p) = 0$, car $f_1(p) = f_2(p)$.

- $(Df_2^{-1}(f_1(p))) = Df_2^{-1}(f_2(p)) = (Df_2(p))^{-1} = (Df_1(p))^{-1}$, car $Df_1(p) = Df_2(p)$ et $f_1(p) = f_2(p)$. Donc :

$$\begin{aligned} D\phi(0) &= Dk(p) \circ D(f_2)^{-1}(f_1(p)) \circ Df_1(p) \circ Dk^{-1}(0) \\ &= Dk(p) \circ Dk^{-1}(0) \\ &= \text{Id}. \end{aligned}$$

- $f_1^*\beta = \alpha$, $f_2^*\beta = \alpha$ et $k^*dx \wedge dy = \alpha$, donc :

$$\begin{aligned} \phi^*dx \wedge dy &= (k \circ f_2^{-1} \circ f_1 \circ k^{-1})^*dx \wedge dy \\ &= (f_2^{-1} \circ f_1 \circ k^{-1})^*\alpha \\ &= (f_1 \circ k^{-1})^*\beta \\ &= (k^{-1})^*\alpha \\ &= dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer à ϕ la proposition 2.2 dans un voisinage convenable de ϕ .

L'ouvert $\phi(k(O))$ est contenu dans le compact $f_2^{-1} \circ f_1(k(\overline{O}))$ lui même contenu dans $k(W)$. On peut donc considérer un voisinage \mathcal{W} de ϕ dans $C^1(k(O), \mathbb{R}^2)$ tel que si $\psi \in \mathcal{W}$ alors $\psi(k(O)) \subseteq k(W)$.

Posons alors :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{W} &\longrightarrow C^1(O, N) \\ \psi &\longmapsto f_2 \circ k^{-1} \circ \psi \circ k \end{aligned}$$

- Φ est définie...en effet si $\psi \in \mathcal{W}$, $\psi(k(O)) \subseteq k(W)$!
- Φ est continue,
- $\Phi(\phi) = (f_1)_{|_O}$.

D'après la proposition 1.5, il existe \mathcal{V}' un voisinage de $(f_1)_{|_O}$ dans $C^1(O, N)$ tel que si $h : M \rightarrow N$ vérifie :

$$\left. \begin{aligned} - h_{|_O} &\in \mathcal{W}, \\ - h &\text{ est de classe } C^1, \\ - h &= f_1 \text{ hors de } O. \end{aligned} \right\} \text{ alors } h \in \mathcal{U}. \quad (\star)$$

Posons $\mathcal{V} = \Phi^{-1}(\mathcal{W})$. L'ensemble \mathcal{V} est alors un voisinage de ϕ dans $C^1(k(O), \mathbb{R}^2)$.

Appliquons donc la proposition 2.2 à ϕ et à \mathcal{U} voisinage de ϕ : il existe $\tilde{\phi} \in \mathcal{U}$ préservant $dx \wedge dy$, $s > 0$ et O' un ouvert de \mathbb{R}^2 tel que

- $\overline{B(0, s)} \subseteq O' \subseteq \overline{O'} \subseteq k(O)$,
- $\tilde{\phi} = \phi$ sur $k(O) \setminus O'$,
- $\tilde{\phi} = \text{id}$ sur $\overline{B(0, s)}$.

Posons $V = k^{-1}(B(0, s))$. L'ensemble V est un voisinage de p .

Enfin considérons l'application g définie par :

$$g : M \longrightarrow N \\ x \longmapsto \begin{cases} \Phi(\tilde{\phi})(x) & \text{si } x \in O \\ f_1(x) & \text{si } x \in M \setminus O \end{cases}$$

Reste à montrer que l'application $g : M \rightarrow N$ et le voisinage V de p conviennent...

— Remarquons tout d'abord que :

$$V = k^{-1}(B(0, s)) \subseteq k^{-1}(O') \subseteq k^{-1}(\overline{O'}) \subseteq O \subseteq W \subseteq U.$$

— L'ouvert O est inclus dans U et $g = f_1$ sur $M \setminus O$. Donc :

$$g = f_1 \text{ sur } M \setminus O.$$

— L'application ϕ coïncide avec l'identité sur $\overline{B(0, s)}$ et $g = \Phi(\psi) = f_2 \circ k^{-1} \circ \psi \circ k$ sur O qui contient $k^{-1}(B(0, s)) = V$. Donc :

$$g = f_2 \text{ sur } \overline{V}.$$

— Déontrons que $g \in \mathcal{U}$. Pour cela utilisons (\star) .

Tout d'abord, $g|_O = \Phi(\tilde{\phi})$, et $\tilde{\phi} \in \Phi^{-1}(\mathcal{W})$. Donc :

$$g|_O \in \mathcal{W}.$$

Ensuite :

$$g = f_1 \text{ sur } M \setminus O.$$

De plus g est de classe C^1 car :

- $g = \Phi(\tilde{\phi})$ est C^1 sur O ,
- $g = \Phi(\tilde{\phi}) = f_1$ sur $O \setminus k^{-1}(\overline{O'})$ }
 car $\tilde{\phi} = \phi$ sur $k(O) \setminus O'$
 et $\Phi(\phi) = (f_1)|_O$
- $g = f_1$ sur $M \setminus O$ } donc g est de classe C^1 sur $M \setminus k^{-1}(\overline{O'})$.

Or $k^{-1}(\overline{O'})$ est inclus dans O . La surface M est donc la réunion des deux ouverts O et $M \setminus k^{-1}(\overline{O'})$ sur lesquelles f est C^1 . Par conséquent g est de classe C^1 .

— Enfin $g^*\beta = \alpha$ car M est la réunion des deux ouverts O et $M \setminus k^{-1}(\overline{O'})$ sur chacune desquelles $g^*\beta = \alpha$. En effet :

- sur $M \setminus k^{-1}(\overline{O'})$, l'application g coïncide avec f_1 et $f_1^*\beta = \alpha$,
- sur O , $g = \Phi(\tilde{\phi}) = f_2 \circ k^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ k$. Comme $f_2^*\beta = \alpha$, $k^*dx \wedge dy = \alpha$ et $\psi^*dx \wedge dy = dx \wedge dy$, on en déduit que $g^*\beta = \alpha$ sur O . □

Preuve de la proposition 2.1. — Soit $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in M$ un point périodique de période k pour f .

Soit \mathcal{U} un voisinage de f dans $C_\omega^1(M)$ et U un voisinage de p dans M .

Soit (W_1, h) une carte de M en p telle que $h^*dx \wedge dy = \omega$ et $h(p) = 0$.

Notons :

$$\begin{aligned}\phi : W_1 &\longrightarrow T_p M \\ x &\longmapsto (Dh(p))^{-1} \circ h(x),\end{aligned}$$

L'application ϕ est un difféomorphisme de U' voisinage de p sur son image qui est un ouvert de $T_p M$ contenant 0 . C'est cette application qui va être la conjugaison entre l'application g que nous allons construire et l'application $Df^k(p)$ qui est un endomorphisme de $T_p M$.

Nous allons appliquer la proposition 2.3 à l'application f et à l'application $x \mapsto \phi^{-1} \circ Df^k(p) \circ \phi \circ f^{-k+1}(x)$ définie sur un voisinage de $f^{k-1}(p)$.

Posons $W_2 = \phi(W_1)$.

L'application ϕ est un C^1 difféomorphisme sur son image et $\phi(p) = 0 \in T_p M$, donc :

- W_1 est un voisinage de 0 dans $T_p M$,
- ϕ est un difféomorphisme de W_1 sur W_2 ,
- $\phi(p) = 0$ et $D\phi(p) = \text{Id}_{T_p M}$,
- Comme $h^* dx \wedge dy = \omega$ et $Dh(p)^* dx \wedge dy = \omega_p$, on a $\phi^* \omega_p = \omega$.

L'application $Df^k(p) \circ \phi : W_1 \rightarrow T_p M$ est continue et envoie p sur 0 . Il existe donc V_1 un ouvert de M contenant p tel que :

$$D^k(p) \circ \phi(V_1) \subseteq W_2.$$

De plus f^{-1} est continue, et $p, \dots, f^{k-1}(p)$ sont des points deux à deux distincts (k est la plus petite période de p pour f), on peut toujours supposer que $V_1, f(V_1), \dots, f^{k-1}(V_1)$ sont deux à deux disjoints.

Considérons alors l'application suivante :

$$\begin{aligned}\Phi : f^{k-1}(V_1 \cap U) &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \phi^{-1} \circ Df^k(p) \circ \phi \circ f^{-k+1}(x).\end{aligned}$$

Φ est bien définie...par construction de V_1 ! Vérifions les hypothèses de la proposition 2.3 :

- Φ est un difféomorphisme sur son image.

- $\Phi(f^{k-1}(p)) = f(f^{k-1}(p))$ car

$$\begin{aligned}\Phi(f^{k-1}(p)) &= \phi^{-1} \circ Df^k(p) \circ \phi \circ f^{-k+1}(f^{k-1}(p)) \\ &= \phi^{-1} \circ Df^k(p) \circ \phi(p) \\ &= p \\ &= f^k(p) \quad \text{car } p \text{ est } k \text{ périodique pour } f \\ &= f(f^{k-1}(p))\end{aligned}$$

- $D\Phi(f^{k-1}(p)) = Df(f^{k-1}(p))$ car

$$\begin{aligned}D\Phi(f^{k-1}(p)) &= D(\phi^{-1})(0) \circ Df^k(p) \circ D\phi(p) \circ Df^{-k+1}(f^{k-1}(p)) \\ &= Df(f^{k-1}(p)) \quad \text{car } D\phi(p) = D(\phi^{-1})(0) = \text{id}_{T_p M}\end{aligned}$$

- Comme $f^*\omega = \omega$ et $f^k(p) = p$, on obtient que $Df^k(p)^*\omega_p = \omega_p$. Or $\phi^*\omega_p = \omega$. Donc :

$$\Phi^*\omega = (\phi^{-1} \circ Df^k(p) \circ \phi \circ f^{-k+1})^*\omega = \omega.$$

Appliquons donc la proposition 2.3 à f et à Φ sur le voisinage $f^{k-1}(V_1 \cap U)$ de $f^{k-1}(p)$. Il existe V' un ouvert de M contenant le point $f^{k-1}(p)$ et l'ouvert O ainsi qu'une application g appartenant à \mathcal{U} tels que :

- $V' \subseteq f^{k-1}(V_1 \cap U)$,
- $g = \Phi$ sur V' ,
- $g = f$ sur $M \setminus f^{k-1}(V_1 \cap U)$.

Posons alors $V = f^{1-k}(V')$ qui est un ouvert de M contenant p .

Il s'agit à présent de démontrer que l'application g et l'ouvert V contenant p ainsi construits conviennent.

- Remarquons tout d'abord que :

$$V = f^{1-k}(V') \subseteq f^{1-k}(f^{k-1}(V_1 \cap U)) = V_1 \cap U \subseteq U.$$

- L'application g coïncide avec f hors de $f^{k-1}(V_1 \cap U)$. En particulier

$$g = f \text{ sur } M \setminus f^{k-1}(U).$$

- L'ensemble V est inclus dans V_1 et $Df^k(p)(\phi(V_1)) \subseteq W_2$. Par conséquent :

$$Df^k(p)(\phi(V)) \subseteq W_2.$$

- Reste à montrer que $g^k = \phi^{-1} \circ Df^k(p) \circ \phi$ sur V .

L'application g coïncide avec f hors de $f^{k-1}(V_1 \cap U)$. Comme $V_1, \dots, f^{k-1}(V_1)$ sont deux à deux disjoints, g coïncide avec f sur $V_1 \cap U, \dots, f^{k-2}(V_1 \cap U)$. Par conséquent g^{k-1} est égale à f^{k-1} sur $V_1 \cap U$ donc sur V . Or sur $f^{k-1}(V)$ (qui est égal à V'), $g = \Phi = \phi^{-1} \circ Df^k(p) \circ \phi \circ f^{1-k}$. Par conséquent,

$$g^k = \phi^{-1} \circ Df^k(p) \circ \phi \text{ sur } V.$$

□

2.2 Perturber la différentielle d'un difféomorphisme symplectique d'une surface

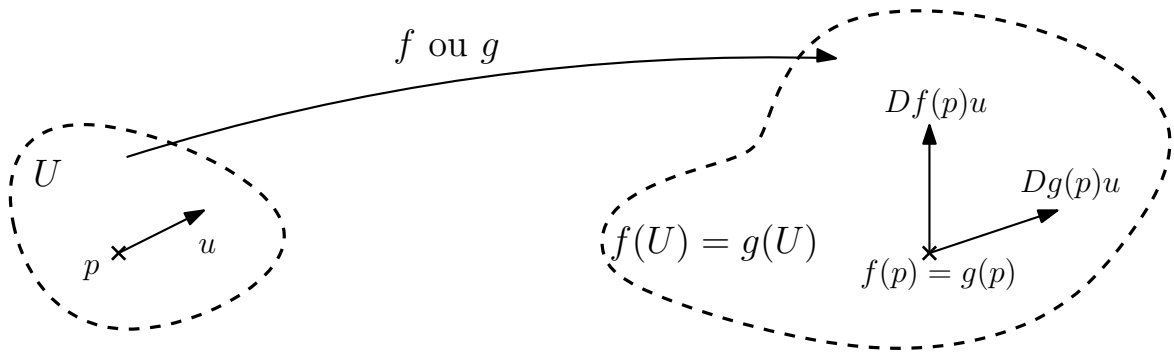
Soit $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$ et $p \in M$.

Notons $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle α .

Nous cherchons à perturber f au voisinage de p pour modifier l'application $Df(p)$. Plus précisément, un voisinage \mathcal{U} de f , un voisinage U de p et $u \in T_pM \setminus \{0\}$ étant fixés, nous allons construire $g \in \mathcal{U}$ tel que :

- $g(p) = f(p)$, (ainsi $Dg(p)$ et $Df(p)$ sont toutes les deux des applications linéaires entre T_pM et $T_{f(p)}M$),

- g coïncide avec f hors de U ,
- $Dg(p)u \notin Df(p)(\mathbb{R}u)$.



Voici le résultat que nous obtenons :

PROPOSITION 2.6. — Soit (M, ω) une surface symplectique, $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$, $p \in M$ et $u \in T_pM$. Soit \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ et U un voisinage de p . Il existe alors $g \in \mathcal{U}$ tel que :

- $g(p) = f(p)$,
- $g = f$ sur $M \setminus U$,
- $Dg(p)u \notin Df(p)(\mathbb{R}u)$.

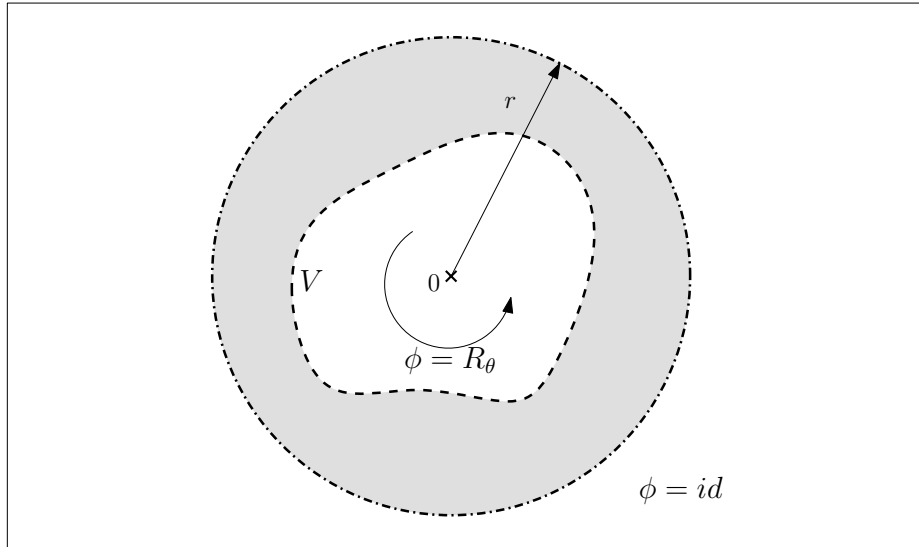
Simplifions tout d'abord le problème. Plaçons nous dans \mathbb{R}^2 au voisinage de 0 et perturbons l'identité au voisinage de 0 pour obtenir une application g qui coïncide avec l'identité hors d'un voisinage de 0 et qui coïncide avec une rotation autour de 0. Dans ce cas la différentielle de l'application g en 0 n'envoie plus aucun vecteur sur un vecteur qui lui serait colinéaire :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, Dg(0)u \notin \mathbb{R}u.$$

Voici ce que nous allons montrer :

PROPOSITION 2.7. — Soit ε et m deux réels strictement positifs. Il existe $\alpha \in]0, \pi/2[$ tel que pour tout $\beta \in]-\alpha; \alpha[$, il existe ϕ une application du plan de classe C^1 préservant $dx \wedge dy$ et V un voisinage de 0 qui vérifient :

- $\phi = R_\beta$ sur V ,
- $\phi = id$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, m)$,
- $\|\phi - id\|_{C^1} < \varepsilon$.



Pour montrer la proposition 2.6, nous appliquons ce résultat au voisinage de p . Voici comment procéder en supposant vraie la proposition 2.7.

Preuve de la proposition 2.6. — Soit $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$, $p \in M$ et $u \in T_p M$. Soit U un voisinage de p et \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$.

Considérons (V, ϕ) une carte de M en $f(p)$ telle que $\phi^* dx \wedge dy = \omega$ et $\phi(p) = 0$.

Soit U' un ouvert de M relativement compact, contenant p , tel que :

$$U' \subseteq U \text{ et } f(\overline{U'}) \subseteq V.$$

Un tel ouvert U' existe parce que f est continue en p et parce que V est un voisinage de $f(p)$.

Soit $r > 0$ tel que

$$\overline{B(0, r)} \subseteq \phi(f(U')).$$

Un tel r existe car f^{-1} étant continue, U' étant un voisinage de p et $\phi(f(p)) = 0$, $f(U')$ est un voisinage de $f(p)$.

Considérons enfin \mathcal{W} un voisinage de $\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ dans $C^1(\mathbb{R}^2)$ tel que :

$$\forall h \in \mathcal{W}, h(\phi(f(U'))) \subseteq \phi(V).$$

Un tel voisinage existe car $\phi(f(\overline{U'}))$ est compact et $\text{id}(\phi(f(\overline{U'})))$ est inclus dans $\phi(V)$.

Considérons alors l'application Φ définie sur \mathcal{W} par :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{W} &\longrightarrow C^1(U', M) \\ h &\longmapsto \phi^{-1} \circ h \circ \phi \circ f|_{U'} \end{aligned}$$

L'application Φ est continue et envoie $\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ sur $f|_{U'}$. Considérons alors \mathcal{U}' un voisinage de $f|_{U'}$ tel que si $h : M \rightarrow M$ vérifient :

- $h|_{U'} \in \mathcal{U}'$,
 - h est de classe C^1 et $h^*\omega = \omega$,
 - $h = \text{id}$ hors de U' .
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} - \\ - \\ - \end{matrix}} \right\} \text{ alors } h \in \mathcal{U}. \quad (\star)$$

Un tel voisinage \mathcal{U}' de $f|_{U'}$ existe car $\text{Diff}^1(M)$ étant un ouvert de $C^1(M)$, le voisinage \mathcal{U} de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ est l'intersection d'un voisinage \mathcal{V} de f dans $C^1(M)$ avec l'ensemble des applications de M de classe C^1 qui préservent ω . Il suffit donc d'appliquer la proposition 1.5 à ce voisinage \mathcal{V} .

Par continuité de Φ , il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\Phi(\{j \in \mathcal{W}, j = \text{id}_{\mathbb{R}^2} \text{ hors de } B(0, r) \text{ et } \|j - \text{id}_{\mathbb{R}^2}\|_{C^1} < \varepsilon\}) \subseteq \mathcal{U}'.$$

Appliquons la proposition 2.7 ($D\phi \circ f(p)u$ est un vecteur de \mathbb{R}^2) : il existe $j \in \mathcal{W}$ tel que :

- $j(0) = 0$,
- $Dj(0)(D(\phi \circ f)(p)u) \notin D(\phi \circ f)(p)(\mathbb{R}u)$,
- $j = \text{id}$ hors de $B(0, r)$,
- $j^*dx \wedge dy = dx \wedge dy$.

Posons alors :

$$g: M \longrightarrow M$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \phi^{-1} \circ j \circ \phi \circ f(x) & \text{si } x \in U' \\ f(x) & \text{si } x \in M \setminus U' \end{cases}$$

Montrons alors que g vérifie bien la proposition 2.6.

Tout d'abord remarquons que g coïncide avec f sur $U' \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(B(0, r)))$ puisque $j = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ sur $U' \setminus B(0, r)$. Par construction, $g = f$ sur $M \setminus U'$. Ainsi

$$g = f \text{ sur } M \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(B(0, r))).$$

De plus $\overline{B(0, r)}$ est inclus dans $\phi(f(U'))$. Donc $f^{-1}(\phi^{-1}(\overline{B(0, r)}))$ est inclus dans U' . Ainsi M est la réunion des deux ouverts U' et $M \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(\overline{B(0, r)}))$.

— L'application g est C^1 sur les deux ouverts U' et $M \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(\overline{B(0, r)}))$. Par conséquent g est de classe C^1 sur M .

— Sur U' , $g = \phi^{-1} \circ j \circ \phi \circ f$. Or $\phi^*dx \wedge dy = \omega$ et $j^*dx \wedge dy = dx \wedge dy$. Donc

$$g^*\omega = \omega \text{ sur } U'.$$

Comme $g = f$ sur $M \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(\overline{B(0, r)}))$ et que $f^*\omega = \omega$,

$$g^*\omega = \omega \text{ sur } M \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(\overline{B(0, r)})).$$

Par conséquent, M étant la réunion des deux ouverts U' et $M \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(\overline{B(0, r)}))$,

$$g^*\omega = \omega.$$

— $g = f$ sur $M \setminus U'$. Ainsi, d'après ce qui précède et d'après (\star) , g appartient à \mathcal{U} .

— Par construction, U' est inclus dans U et $g = f$ sur $M \setminus U'$. Ainsi,

$$g = f \text{ sur } M \setminus U.$$

— $Dj(0)(D(\phi \circ f)(p)u) \notin D(\phi \circ f)(p)(\mathbb{R}u)$ et $D\phi^{-1}(0) = (D\phi(f(p)))^{-1}$ est une bijection.

Donc :

$$\begin{aligned} Dg(p)u &= D(\phi^{-1})(0) \circ Dj(0)(D(\phi \circ f)(p)u) \\ &\notin D(\phi^{-1})(0)(D(\phi \circ f)(p)(\mathbb{R}u)) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} D(\phi^{-1})(0)(D(\phi \circ f)(p)u) &= (D\phi(p))^{-1} \circ D\phi(f(p)) \circ Df(p)u \\ &= Df(p)u \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$Dg(p)u \notin Df(p)(\mathbb{R}u).$$

□

Reste donc à démontrer la proposition 2.7.

Preuve de la proposition 2.7. — Soit β un réel strictement compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. L'idée est de perturber l'identité de \mathbb{R}^2 pour obtenir une application qui coïncide avec la rotation R_β au voisinage de 0 et qui préserve la 2-forme $dx \wedge dy$. Pour cela, nous allons nous ramener à travailler sur $\mathbb{T}^1 \times]0; +\infty[$ grâce à l'application j définie ci-dessous :

$$\begin{aligned} j : \mathbb{T}^1 \times]0; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\mapsto \left(\sqrt{\frac{r}{\pi}} \cos(2\pi\theta), \sqrt{\frac{r}{\pi}} \sin(2\pi\theta) \right) \end{aligned}$$

Cette application est un difféomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Pour tout (θ, r) dans $\mathbb{T}^1 \times]0; +\infty[$:

$$Dj(\theta, r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos(2\pi\theta) & -2\pi\sqrt{r} \sin(2\pi\theta) \\ \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin(2\pi\theta) & 2\pi\sqrt{r} \cos(2\pi\theta) \end{pmatrix}$$

donc $\det(Dj(\theta, r)) = 1$. Ainsi, $j^* dx \wedge dy = d\theta \wedge dr$. De plus quelque soit le réel r , on a :

$$j(\mathbb{T}^1 \times]0; \pi^2 r^2]) = B(0, r) \setminus \{0\}.$$

Nous allons alors construire une application ψ de $\mathbb{T}^1 \times]0; +\infty[$ telle que :

- ψ est la rotation de l'anneau ρ_β sur $\mathbb{T}^1 \times]0; \frac{\pi^2 m^2}{2}[$,
- ψ est l'identité sur $\mathbb{T}^1 \times]\pi^2 m^2; +\infty[$,
- $\psi^* d\theta \wedge dr = d\theta \wedge dr$.

Supposons qu'une telle application ψ est construite. Posons $\tilde{\phi} = j \circ \psi \circ j^{-1}$. Alors $\tilde{\phi}$ est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qui vérifie :

- $\tilde{\phi}$ est la rotation R_β sur $B(0, \frac{m}{\sqrt{2}}) \setminus \{0\}$,

- $\tilde{\phi}$ est l'identité sur $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, m)$,
- $\tilde{\phi}^* dx \wedge dy = dx \wedge dy$ car :

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^* dx \wedge dy &= (j \circ \psi \circ j^{-1})^* dx \wedge dy \\ &= (j^{-1})^* (\psi^* (j^* dx \wedge dy)) \\ &= (j^{-1})^* (\psi^* d\theta \wedge dr) \\ &= (j^{-1})^* d\theta \wedge dr = dx \wedge dy\end{aligned}$$

L'application $\tilde{\phi}$ se prolonge alors en une application ϕ du plan, de classe C^1 , en posant $\phi(0) = 0$. Cette application ϕ préserve $dx \wedge dy$ et

- ϕ est la rotation R_β sur $B(0, \frac{m}{\sqrt{2}})$,
- ϕ est l'identité sur $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, m)$,

Posons :

$$V = B(0, \frac{m}{\sqrt{2}}).$$

L'application ϕ et le voisinage V de 0 vérifient les conditions de la proposition à condition que $\|\phi - \text{id}\|_{C^1}$ soit strictement inférieur à ε . Remarquons que :

$$\|\phi - \text{id}\|_{C^1} = \left\| \tilde{\phi} - \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \right\|_{C^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}.$$

Or, l'application $\tilde{\phi}$ dépend continument de ψ pour la topologie C^1 forte de Whitney (cf. proposition 1.3 de ce chapitre). Par conséquent, pour que $\|\phi - \text{id}\|_{C^1}$ soit strictement inférieur à ε , il suffit que ψ soit suffisamment près de l'identité de $\mathbb{T}^1 \times]0; +\infty[$ en topologie C^1 . En fait, nous allons construire l'application ψ de telle sorte que cette application dépende continument de β et que ψ soit l'identité sur $\mathbb{T}^1 \times]0; +\infty[$ si $\beta = 0$. Il existera alors un réel α compris strictement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, tel que pour tout β compris entre $-\alpha$ et α , alors :

$$\|\phi - \text{id}\|_{C^1} < \varepsilon.$$

Venons en donc à la construction de l'application ψ . Pour cela considérons une fonction plateau $P :]0; +\infty[\rightarrow [0; 1]$ de classe C^∞ telle que :

$$\begin{cases} P(u) = 1 \text{ si } u \leq \frac{1}{2} \\ P(u) = 0 \text{ si } u \geq 1 \end{cases}$$

Posons alors pour tout (θ, r) appartenant à $\mathbb{T}^1 \times]0; +\infty[$:

$$\psi(\theta, r) = (\theta + \beta P(\frac{r}{\pi^2 m^2}), r).$$

Vérifions que cette application ψ convient. Soit $(\theta; r) \in \mathbb{T}^1 \times]0; +\infty[$:

1. Si r appartient à $]0; \frac{\pi^2 m^2}{2}]$ alors $0 < \frac{r}{\pi^2 m^2} \leq \frac{1}{2}$. Ainsi $P(\frac{r}{\pi^2 m^2}) = 1$. Par conséquent,

$$\psi(\theta, r) = (\theta + \beta, r).$$

Ainsi, ψ coïncide avec ρ_β sur $\mathbb{T}^1 \times]0; \frac{\pi^2 m^2}{2}]$.

2. Si $r \geq \pi^2 m^2$ alors $r \geq 1$. Ainsi $P(\frac{r}{\pi^2 m^2}) = 0$. Par conséquent,

$$\psi(\theta, r) = (\theta, r).$$

Ainsi, ψ coïncide avec l'identité sur $\mathbb{T}^1 \times [\pi^2 m^2; +\infty[$.

3. vérifions à présent que $\psi^* d\theta \wedge dr = d\theta \wedge dr$. Pour cela, calculons la différentielle de ψ :

$$D\psi(\theta, r) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\pi^2 m^2} P'(\frac{r}{\pi^2 m^2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\det(D\psi(\theta, r)) = 1$. Ainsi :

$$\psi^* d\theta \wedge dr = d\theta \wedge dr.$$

4. Il reste à vérifier que ψ est l'application identité si $\beta = 0$ et que ψ dépend continument de β pour la topologie C^1 . Ces deux points s'obtiennent de façon assez immédiate en observant la forme de ψ et de $D\psi$.

■

3 Perturber une rotation de l'anneau

Considérons l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ muni de la forme symplectique $d\theta \wedge dr$.

Notations :

Soit $\alpha \in \mathbb{T}^1$. Les rotations de l'anneau sont les applications ρ_α définie par $\rho_\alpha(\theta, r) = (\theta + \alpha, r)$.

Si u et v sont deux points du cercle, la distance entre u et v notée $d(u, v)$ est définie par :

$$d(u, v) = \min\{|\tilde{u} - \tilde{v}| \mid \pi(\tilde{u}) = u, \pi(\tilde{v}) = v\}.$$

On munit l'espace tangent du cercle de sa trivialisatation canonique.

Notons $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{T}^1)$ l'ensemble des applications g du cercle telles que $g'(\theta) \neq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$.

Si f et g sont deux applications de classe C^2 du cercle, on note

$$d_{C^2}(f, g) = \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} \{d(f(\theta), g(\theta)), \|f'(\theta) - g'(\theta)\|, \|f''(\theta) - g''(\theta)\|\}.$$

Dans ce paragraphe nous allons perturber une rotation de l'anneau sur un voisinage d'un cercle $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$. Plus précisément, une rotation de l'anneau laisse invariante tous les cercles $\mathbb{T}^1 \times \{r\}$ ($r \in \mathbb{R}$). Selon la valeur de l'angle de rotation, c'est-à-dire si cet angle est rationnel ou non, tous les points de l'anneau sont périodique pour cette rotation.

Notre but est de fixer l'un des cercles $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$ puis de perturber cette rotation au voisinage de ce cercle pour obtenir un difféomorphisme symplectique laissant invariant encore ce cercle et qui possède un nombre fini de points périodiques sur $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$ qui de plus sont hyperboliques.

Notations :

- Soit $\alpha \in \mathbb{T}^1$ et $\tilde{\alpha}$ un relevé de α . Notons R_α la rotation du cercle d'angle α définie par $R_\alpha(\theta) = \theta + \alpha$. L'application \tilde{R}_α définie sur \mathbb{R} par $\tilde{R}_\alpha(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta} + \tilde{\alpha}$ est un relevé de R_α .
- Soit $g \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{T}^1)$ et r_0 un réel. Rappelons que ρ_g est l'application de l'anneau définie par (cf. exemple 1.21) :

$$\begin{aligned} \rho_g : \quad \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ (\theta, r) &\longmapsto (g(\theta), \frac{r - r_0}{g'(\theta)} + r_0). \end{aligned}$$

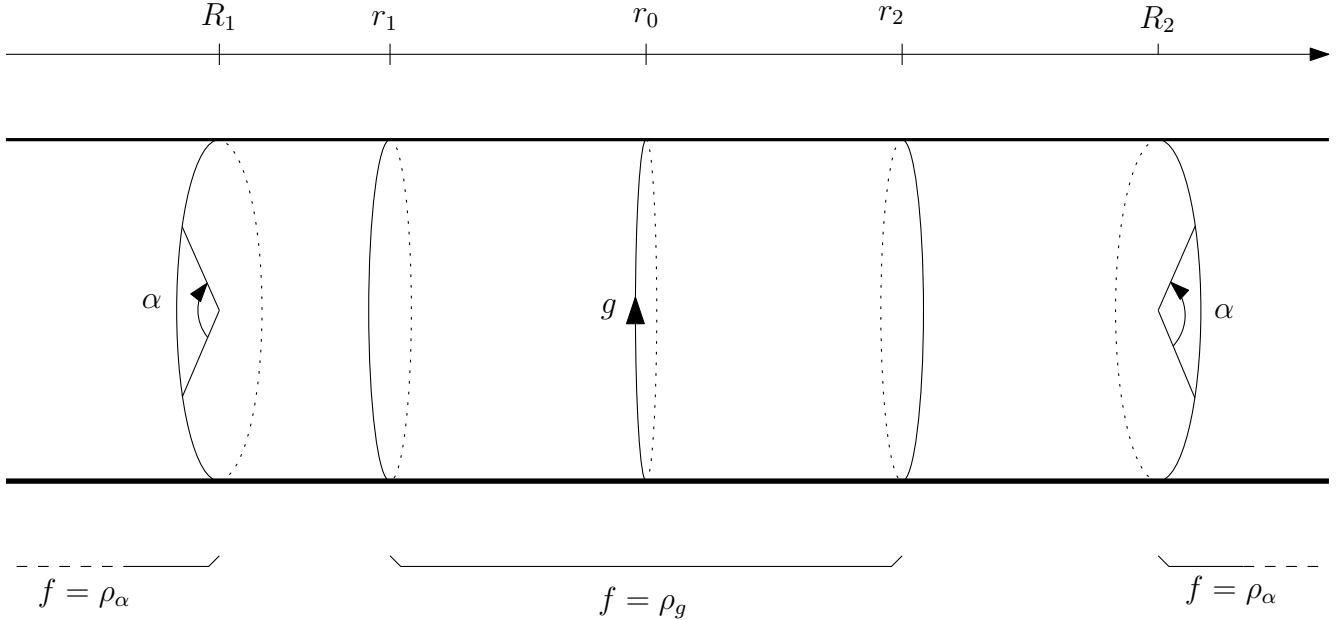
Fixons $r_0 \in \mathbb{R}$. Soit g un difféomorphisme du cercle de classe C^2 . Remarquons que l'application ρ_g laisse invariant le cercle $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$ et qu'elle est conjuguée à g sur ce cercle. Par conséquent si g possède un nombre fini de points périodiques sur le cercle, il en est de même pour ρ_g . De plus si la dérivée de g est différente de 1 ou -1 en ces points, ce seront des points périodiques hyperboliques.

L'idée est donc de trouver $g \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{T}^1)$ et de construire une application f proche de ρ_α de telle sorte que f coïncide avec ρ_g sur un voisinage de $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$ et avec ρ_α hors d'un voisinage de $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$, plus grand que le précédent. C'est le propos de la proposition suivante, proposition dont la preuve repose sur le formalisme des fonctions génératrices développé au paragraphe 1.3. de ce chapitre :

PROPOSITION 3.1. — Soit $\alpha \in \mathbb{T}^1$, $(r_0, r_1, r_2, R_1, R_2) \in \mathbb{R}^5$, tels que $R_1 < r_1 < r_0 < r_2 < R_2$. Soit \mathcal{U} un voisinage de ρ_α dans $C_\omega^1(\mathbb{A})$.

Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $g \in C_0^2(\mathbb{T}^1)$ vérifiant $d_{C^2}(g, R_\alpha) < \eta$ il existe $f \in \mathcal{U}$ telle que :

- l'application f coïncide avec ρ_α sur $\mathbb{A} \setminus \mathbb{T}^1 \times]R_1; R_2[$,
- pour tout $(\theta, r) \in \mathbb{T}^1 \times [r_1; r_2]$, $f(\theta, r) = (g(\theta), \frac{r - r_0}{g'(\theta)} + r_0)$.



Ce qui permet de démontrer le résultat souhaité :

PROPOSITION 3.2. — Soit $\alpha \in \mathbb{T}^1$, $(r_0, R_1, R_2) \in (\mathbb{R})^3$, tels que $R_1 < r_0 < R_2$. Soit \mathcal{U} un voisinage de ρ_α dans $C_\omega^1(\mathbb{A})$. Il existe alors $f \in \mathcal{U}$ tel que :

- l'application f coïncide avec la rotation ρ_α sur $\mathbb{A} \setminus \mathbb{T}^1 \times]R_1; R_2[$,
- $f(\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}) = \mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$,
- l'application f possède un nombre fini non nul de points périodiques sur $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$, tous hyperboliques.

Donnons immédiatement une preuve de cette proposition en supposant vraie la proposition 3.1, proposition dont la preuve est technique et s'appuie, nous l'avons déjà dit, sur le formalisme des fonctions génératrices.

Preuve de la proposition 3.2. — Soit $\alpha \in \mathbb{T}^1$. Si α est rationnel, tous les points du cercle sont périodiques pour la rotation du cercle R_α . Si au contraire α est irrationnel, aucun point n'est périodique pour cette même rotation. Voici un lemme qui nous donne une application, proche de R_α , qui possède un nombre fini de points périodiques qui, plus est, sont hyperboliques.

LEMME 3.3. — Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in C_0^2(\mathbb{T}^1)$ tel que $d_{C^2}(g, R_\alpha) < \varepsilon$ et g possède un nombre fini de points périodiques qui sont tous hyperboliques.

Preuve du lemme 3.3. — Soit $\frac{p}{q}$ un rationnel et β un réel strictement positif tels que $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, et $\beta < \min\left\{ \frac{1}{2q\pi}, \frac{\varepsilon}{4q^2\pi^2} \right\}$. Considérons alors la fonction \tilde{g} définie pour tout réel $\tilde{\theta}$ par :

$$\tilde{g}(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta} + \frac{p}{q} + \beta \sin(2q\pi\tilde{\theta}).$$

Alors pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}(\tilde{\theta} + 1) = \tilde{g}(\tilde{\theta}) + 1$ et

$$\tilde{g}'(\tilde{\theta}) = 1 + 2q\pi\beta \cos(2q\pi\tilde{\theta}).$$

Ainsi comme $\beta < \frac{1}{2q\pi}$, $\tilde{g}'(\tilde{\theta}) > 0$ pour tout réel $\tilde{\theta}$. Ainsi \tilde{g} est le relevé d'un homéomorphisme g du cercle. Vérifions que cette application g convient. Calculons tout d'abord la dérivée et la dérivée seconde de g : soit $\theta \in \mathbb{T}^1$,

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 1 + 2q\pi\beta \cos(2q\pi\theta) \\ g''(\theta) &= -4q^2\pi^2\beta \sin(2q\pi\theta). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |g(\theta) - R_\alpha(\theta)| &\leq \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| + \beta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4q^2\pi^2} < \varepsilon, \\ |g'(\theta) - R'_\alpha(\theta)| &= |g'(\theta) - 1| \leq 2q\pi\beta < \frac{\varepsilon}{2q\pi} < \varepsilon, \\ |g''(\theta) - R''_\alpha(\theta)| &= |g''(\theta)| \leq 4q^2\pi^2\beta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$d_{C^2}(g, R_\alpha) < \varepsilon.$$

De plus les points périodiques de g sont les points de la forme $\frac{kp}{2q}$, $k \in \{0, \dots, 2q - 1\}$. Ils sont tous q périodiques, et pour tout $k \in \{0, \dots, 2q - 1\}$,

$$g\left(\frac{kp}{2q}\right) = \frac{(k+2)p}{2q}.$$

De plus si k est pair, alors $g'\left(\frac{kp}{2q}\right) = 1 + 2q\pi\beta$ donc :

$$(g^q)'\left(\frac{kp}{q}\right) = (1 + 2q\pi\beta)^q > 1.$$

Et si k est impair, alors $g'\left(\frac{kp}{2q}\right) = 1 - 2q\pi\beta$ donc :

$$(g^q)'\left(\frac{kp}{q}\right) = (1 - 2q\pi\beta)^q \in]0; 1[.$$

Par conséquent, les points périodiques de la fonction g sont tous hyperboliques. ■

Soit \mathcal{U} un voisinage de ρ_α . D'après le lemme précédent il existe une application $g \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{T}^1)$ et un entier q strictement positif tels que :

– $d_{C^2}(g, R_\alpha) < \eta$,
– g possède un nombre fini de points périodiques de période q , $\theta_1, \dots, \theta_n$, tels que $(g^q)'(\theta_i) \notin \{1; -1\}$
où $\eta > 0$ est la constante donnée par la proposition 3.1. D'après cette proposition, il existe une application $f \in \mathcal{U}$ telle que :

- l'application f coïncide avec ρ_α sur $\mathbb{A} \setminus \mathbb{T}^1 \times]R_1; R_2[$,
- pour tout $(\theta, r) \in \mathbb{T}^1 \times [r_1; r_2]$, $f(\theta, r) = (g(\theta), \frac{r - r_0}{g'(\theta)} + r_0)$.

Ainsi, quelque soit $\theta \in \mathbb{T}^1$,

$$f(\theta, r_0) = (g(\theta), r_0).$$

Par conséquent,

$$f(\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}) = \mathbb{T}^1 \times \{r_0\}.$$

Les points $(g(\theta_1), r_0), \dots, (g(\theta_n), r_0)$ sont alors les seuls points périodiques de f sur $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$. Ils sont de période q et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$Df^q(\theta_i, r_0) = \begin{pmatrix} (g^q)'(\theta_i) & 0 \\ \checkmark & \frac{1}{(g^q)'(\theta_i)} \end{pmatrix}$$

Ainsi $(g^q)'(\theta_i)$ et $\frac{1}{(g^q)'(\theta_i)}$ sont les deux valeurs propres de $Df^q(\theta_i, r_0)$. Or $(g^q)'(\theta_i) \notin \{1; -1\}$. Les points $(g(\theta_1), r_0), \dots, (g(\theta_n), r_0)$ sont donc des points périodiques hyperboliques pour f . \square

Venons en à la preuve de la proposition 3.1.

Preuve de la proposition 3.1. —

Soit $\alpha \in \mathbb{T}^1$. Fixons $(r_0, r_1, r_2, R_1, R_2) \in \mathbb{R}^5$, tels que $R_1 < r_1 < r_0 < r_2 < R_2$. Choisissons $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ un relevé de α .

Soit \mathcal{U} un voisinage de ρ_α dans $C_\omega^1(\mathcal{A})$.

Plan de la preuve

Nous allons chercher $\eta > 0$ tel que si $g \in \text{Diff}_\omega^2(\mathbb{A})$ et si $d_{C^2}(R_\alpha, g) < \eta$, il existe alors f dans \mathcal{U} coïncidant avec ρ_α hors de $\mathbb{T}^1 \times]R_1, R_2[$ et avec ρ_g sur $\mathbb{T}^1 \times [r_1, r_2]$.

Rappelons que

$$\begin{aligned} H_{\tilde{\alpha}} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{\theta}, R) &\longmapsto (\tilde{\theta} + \tilde{\alpha})R \end{aligned}$$

est une fonction génératrice de ρ_α , c'est-à-dire que (cf exemple 1.20) $H_{\tilde{\alpha}} \in \mathcal{H}$ et que $I \circ J(H_{\tilde{\alpha}}) = H_{\tilde{\alpha}}$.

De même, si $g \in C_0^2(\mathbb{T}^1)$ et si \tilde{g} est un relevé de g , l'application définie par :

$$\begin{aligned} H_{\tilde{g}} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{\theta}, R) &\longmapsto r_0(\tilde{\theta} + \tilde{g}(0) + \tilde{g}(\tilde{\theta})) + R\tilde{g}(\tilde{\theta}) \end{aligned}$$

est une fonction génératrice de ρ_g , c'est-à-dire que (cf exemple 1.21) $H_{\tilde{g}} \in \mathcal{H}$ et $I \circ J(H_{\tilde{g}}) = \rho_g$.

Considérons $P : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ une fonction plateau C^∞ telle que :

- $P(R) = 1$ si $R \in]r_1, r_2[$,
- $P(R) = 0$ si $R \notin \mathbb{R} \times]R_1; R_2[$.

Soit $g \in C_0^2(\mathbb{T}^1)$ et \tilde{g} un relevé de g . L'idée est de poser

$$\Lambda(\tilde{g}) : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{\theta}, r) \mapsto P(R)H_{\tilde{g}}(\tilde{\theta}, R) + (1 - P(R))H_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\theta}, R) \end{array}$$

Nous allons montrer que si $d_{C^2}(g, R_\alpha)$ est suffisamment petite, l'application $\Lambda(\tilde{g})$ appartient à \mathcal{H} et que $I \circ J(\Lambda(\tilde{g}))$ appartient à \mathcal{U} . Nous verrons alors, en appliquant la proposition 1.19 que :

- $f = I \circ J(\Lambda(\tilde{g}))$ coïncide avec ρ_g sur $\mathbb{T}^1 \times]r_1, r_2[$ car $\Lambda(\tilde{g}) = H_{\tilde{g}}$ sur $\mathbb{R} \times]r_1, r_2[$.
- f coïncide avec ρ_α sur $\mathbb{A} \setminus \mathbb{T}^1 \times]R_1, R_2[$ car $\Lambda(\tilde{g}) = H_{\tilde{\alpha}}$ sur $\mathbb{A} \setminus \mathbb{T}^1 \times]r_1, r_2[$.

Soit donc P la fonction plateau définie ci-dessus.

Considérons l'ensemble \mathcal{T}^2 l'ensemble des fonctions réelles \tilde{g} telles que $\tilde{g}'(\tilde{\theta}) \neq 0$ et telles que $\tilde{g}(\tilde{\theta} + 1) = \tilde{g}(\tilde{\theta})$ quelque soit $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$.

Posons alors :

$$\Lambda : \mathcal{T}^2 \longrightarrow C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ \tilde{g} \longmapsto \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{\theta}, r) \mapsto P(R)H_{\tilde{g}}(\tilde{\theta}, R) + (1 - P(R))H_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\theta}, R) \end{cases}$$

Comme $I \circ J : \mathcal{H} \rightarrow C_\omega^1(\mathbb{A})$ est continue et que $I \circ J(H_{\tilde{\alpha}}) = \rho_\alpha$, il existe \mathcal{W} un voisinage de $H_{\tilde{\alpha}}$ dans $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tel que :

$$I \circ J(\mathcal{W} \cap \mathcal{H}) \subseteq \mathcal{U}.$$

LEMME 3.4. — Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\tilde{g} \in \mathcal{T}^2$, si $d_{C^1}(\tilde{g}, \tilde{R}_{\tilde{\alpha}}) < \eta$ alors $\Lambda(\tilde{g}) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{H}$.

Terminons la preuve de la proposition en supposant vraie le lemme ci-dessus. Pour cela montrons que le réel $\eta > 0$ donné par ce lemme convient.

Soit $g \in C_0^2(\mathbb{T}^2)$ tel que $d_{C^2}(g, R_\alpha) < \eta$. Considérons $\tilde{g} \in \mathcal{T}^2$ tel que $d_{C^2}(\tilde{g}, \tilde{R}_{\tilde{\alpha}}) = d_{C^2}(g, R_\alpha)$. D'après le lemme ci-dessus :

$$\Lambda(\tilde{g}) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{W}.$$

Posons alors :

$$f = I \circ J(\Lambda(\tilde{g})).$$

Montrons alors que f convient :

D'une part, comme $\Lambda(\tilde{g})$ appartient à $\mathcal{H} \cap \mathcal{W}$ et que $I \circ J(\mathcal{W} \cap \mathcal{H})$ est inclus dans \mathcal{U} , l'application f appartient à \mathcal{U} .

D'autre part pour tout $(\tilde{\theta}, R) \in \mathbb{R}^2$ $\Lambda(\tilde{g})(\tilde{\theta}, R) = P(R)H_{\tilde{g}}(\tilde{\theta}, R) + (1 - P(R))H_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\theta}, R)$. Par conséquent $\Lambda(\tilde{g})$ coïncide avec $H_{\tilde{g}}$ sur $\mathbb{R} \times]r_1; r_2[$ et avec $\Lambda(\tilde{g}) = H_{\tilde{\alpha}}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times]R_1; R_2[$. Ainsi, d'après la proposition 1.19 :

$$\begin{aligned} f &= \rho_g \text{ sur } \mathbb{T}^1 \times]r_1; r_2[, \\ f &= \rho_\alpha \text{ sur } \mathbb{A} \setminus \mathbb{T}^1 \times]R_1; R_2[. \end{aligned}$$

L'application f vérifie donc les conclusions de la proposition...

Reste donc à vérifier le lemme 3.4 :

Preuve du Lemme 3.4. — Commençons tout d'abord par nous assurer que $\Lambda(\tilde{g})$ appartient à \mathcal{W} si \tilde{g} est suffisamment près de R_α .

Sous lemme 3.5. — Il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $\tilde{g} \in \mathcal{T}^2$, si $d_{C^1}(\tilde{g}, \tilde{R}_\alpha) < \mu$ alors $\Lambda(\tilde{g}) \in \mathcal{W}$.

Preuve du sous lemme 3.5 — L'ensemble \mathcal{W} est un voisinage de H_α dans $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Il existe donc $\nu > 0$ tel que si $H \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifie :

$$\left. \begin{aligned} - & H \text{ coïncide avec } H_\alpha \text{ hors de } \mathbb{R} \times]R_1; R_2[, \\ - & \|H - H_\alpha\|_{C^2, \mathbb{T}^1 \times [R_1; R_2]} < \nu. \end{aligned} \right\} \text{ alors } H \in \mathcal{W}.$$

Soit $\tilde{g} \in \mathcal{T}^2$, notons $H = \Lambda(\tilde{g}) - H_\alpha$. D'une part, $H = -H_\alpha$ hors de $\mathbb{R} \times]R_1; R_2[$. D'autre part, un calcul simple donne :

$$\begin{aligned} H(\tilde{\theta}, R) &= P(R)(H_{\tilde{g}} - H_\alpha) = P(R)[(R - r_0)(\tilde{g}(\tilde{\theta}) - (\tilde{\theta} + \tilde{\alpha})) + r_0(\tilde{g}(0) - \tilde{\alpha})], \\ \frac{\partial H}{\partial R}(\tilde{\theta}, R) &= [P'(R)(R - r_0) + P(R)](\tilde{g}(\tilde{\theta}) - (\tilde{\theta} + \tilde{\alpha})) + r_0P'(R)(\tilde{g}(0) - \tilde{\alpha}), \\ \frac{\partial H}{\partial \tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, R) &= P(R)(R - r_0)(\tilde{g}'(\tilde{\theta}) - 1), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\tilde{\theta}, R) &= [P''(R)(R - r_0) + 2P'(R)](\tilde{g}(\tilde{\theta}) - (\tilde{\theta} + \tilde{\alpha})) + r_0P''(R)(\tilde{g}(0) - \tilde{\alpha}), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{\theta}^2}(\tilde{\theta}, R) &= P(R)(R - r_0)\tilde{g}''(\tilde{\theta}), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial R \partial \tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, R) &= [P'(R)(R - r_0) + P(R)](\tilde{g}'(\tilde{\theta}) - 1). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} - & |H(\tilde{\theta}, R)| < |(R - r_0) + r_0|d_{C^2}(\tilde{g}, \tilde{R}_\alpha), \\ - & \left| \frac{\partial H}{\partial R}(\tilde{\theta}, R) \right| < (|P'(R)|(|R - r_0| + r_0) + 1)d_{C^2}(\tilde{g}, \tilde{R}_\alpha) \\ - & \left| \frac{\partial H}{\partial \tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, R) \right| < |R - r_0|d_{C^2}(\tilde{g}, \tilde{R}_\alpha) \\ - & \left| \frac{\partial^2 H}{\partial R^2}(\tilde{\theta}, R) \right| < (|P''(R)|(|R - r_0| + r_0) + 2|P'(R)|)d_{C^2}(\tilde{g}, \tilde{R}_\alpha) \\ - & \left| \frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{\theta}^2}(\tilde{\theta}, R) \right| < |P(R)(R - r_0)|d_{C^2}(\tilde{g}, \tilde{R}_\alpha) \end{aligned}$$

$$- \left| \frac{\partial^2 H}{\partial R \partial \tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, R) \right| < (|P'(R)(R - r_0)| + 1) d_{C^2}(\tilde{g}, \tilde{R}_{\tilde{\alpha}}).$$

Il existe donc $\mu > 0$ telle que si $\tilde{g} \in \mathcal{T}^2$ vérifie $d_{C^2}(\tilde{g}, \tilde{R}_{\tilde{\alpha}}) < \mu$ alors :

$$\|\Lambda(\tilde{g}) - H_{\tilde{\alpha}}\|_{C^2, \mathbb{R} \times [R_1; R_2]} < \nu.$$

Par conséquent $\Lambda(\tilde{g}) \in \mathcal{W}$. ■

Posons :

$$\eta = \min \left\{ \mu, \frac{1}{\max_{R \in \mathbb{R}} (P'(R)(R - r_0) + P(R))} \right\}.$$

la constante η est strictement positive car la fonction P est nulle hors d'un compact de \mathbb{R} .

Soit $\tilde{g} \in \mathcal{T}^1$ telle que $d_{C^1}(\tilde{g}, \tilde{R}_{\tilde{\alpha}}) < \eta$. Posons $H = \Lambda(\tilde{g})$. Comme η est inférieur à μ , nous savons déjà que H appartient à \mathcal{W} . Reste à vérifier que $H \in \mathcal{H}$:

— Comme pour tout $(\tilde{\theta}, R) \in \mathbb{R}^2$, $H_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\theta} + 1, R) = H_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\theta}, R) + R$ et $H_{\tilde{g}}(\tilde{\theta} + 1, R) = H_{\tilde{g}}(\tilde{\theta}, R) + R$, il est facile de voir que :

$$H(\tilde{\theta} + 1, R) = H(\tilde{\theta}, R) + R, \quad \forall (\tilde{\theta}, R) \in \mathbb{R}^2.$$

— Montrons que ψ_H est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 . Pour cela calculons explicitement H et ψ_H à partir de l'expression de $H_{\tilde{g}}$ et $H_{\tilde{\alpha}}$:

$$H(\tilde{\theta}, R) = P(R)(r_0 \tilde{\theta} + (R - r_0) \tilde{g}(\tilde{\theta})) + (1 - P(R))(\tilde{\theta} + \tilde{\alpha})R.$$

Ainsi :

$$\psi_H(\tilde{\theta}, R) = \left(\tilde{\theta}, \frac{\partial H}{\partial \tilde{\theta}}(\tilde{\theta}, R) \right) = \left(\tilde{\theta}, P(R)(R - r_0)(\tilde{g}'(\tilde{\theta}) - 1) + R \right).$$

Il s'agit donc de montrer que pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$ l'application u définie pour tout $r \in \mathbb{R}$ par :

$$u(R) = P(R)(R - r_0)(\tilde{g}'(\tilde{\theta}) - 1) + R$$

est un difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Or pour tout $R \in \mathbb{R}$:

$$u'(R) = (P'(R)(R - r_0) + P(R))(\tilde{g}'(\tilde{\theta}) - 1) + 1.$$

Par conséquent

$$|u'(R) - 1| = \left| (P'(R)(R - r_0) + P(R))(\tilde{g}'(\tilde{\theta}) - 1) \right| \leq \frac{1}{\eta} \left| \tilde{g}'(\tilde{\theta}) - 1 \right|.$$

Or pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, $\left| \tilde{g}'(\tilde{\theta}) - 1 \right| \leq d_{C^2}(g, R_{\tilde{\alpha}}) < \eta$. Ainsi pour tout $R \in \mathbb{R}$,

$$|u'(R) - 1| < 1.$$

Ainsi la fonction u' est strictement positive sur \mathbb{R} . La fonction u est donc strictement croissante. Or pour tout R n'appartenant pas à $[R_1; R_2]$, $P(R) = 0$. Ce qui signifie que $u(R) = R$ hors de $[r_1; R_2]$. Par conséquent :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} u(R) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{R \rightarrow -\infty} u(R) = -\infty.$$

L'application u est donc bien un difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Ce qui implique que ψ_H est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 . Donc :

$$\Lambda(\tilde{g}) = H \in \mathcal{H}. \quad \square$$

4 Application : Entourer un point périodique elliptique d'une courbe fermée simple invariante de classe C^1

Soit (M, ω) une surface symplectique.

Soit $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$, $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in M$ un point périodique elliptique non dégénéré de période k pour f et U un voisinage de p .

Notre but est de perturber f pour trouver un difféomorphisme symplectique g et une courbe fermée simple γ de classe C^1 tels que :

- le point p est un point périodique de période k pour g ,
- la courbe γ est invariante par g^k dont l'image est incluse dans U et qui entoure p (c'est-à-dire que p appartient à une composante connexe de $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ qui est incluse dans U),
- l'application g possède sur la courbe γ un nombre fini non nul de points périodiques, tous hyperboliques.

Pour cela, nous allons appliquer les résultats des deux paragraphes précédents...

Voici donc le résultat que nous nous proposons de démontrer :

THÉOREME 4.1. — *Soit (M, ω) une surface symplectique, $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$, k un entier non nul et $p \in M$ un point périodique elliptique non dégénéré de période k pour f .*

Soit \mathcal{U} un voisinage de f dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ et U un voisinage de p dans M . Il existe alors $F \in \mathcal{U}$ et une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ fermée simple de classe C^1 vérifiant $\gamma'(\theta) \neq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$, tels que :

- *le point p est un point périodique elliptique de période k pour F ,*
- *l'image de γ est incluse dans U et p appartient à une composante connexe relativement compacte de $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ incluse dans U ,*
- *la courbe γ est une courbe invariante par F^k dont F^k préserve l'orientation et sur l'image de laquelle F^k possède un nombre fini de points périodiques tous hyperboliques,*
- *l'application F coïncide avec f hors de U .*

Démonstration. — Nous allons dans un premier temps supposer que p est un point fixe puis nous expliquerons comment passer au cas où p n'est plus un point fixe.

Appliquons la proposition 2.1 au voisinage de p . Il existe $f_1 \in \mathcal{U}$ et un voisinage V de p inclus dans U tel que :

- l'application f_1 coïncide hors de U ,

- l'application f_1 est conjuguée à $Df(p)$ sur V : il existe W_1 un voisinage de p , W_2 un voisinage de 0 dans T_pM et $\phi : W_1 \rightarrow W_2$ un difféomorphisme de classe C^1 tel que :
 - $V \subseteq W_1 \subseteq U$,
 - $\phi(p) = 0$ et $\phi^*\omega_p = \omega$,
 - $Df(p)(\phi(V)) \subseteq W_2$,
 - $f_1 = \phi^{-1} \circ Df(p) \circ \phi$ sur V .

Ainsi :

$$f_1(p) = \phi^{-1} \circ Df(p) \circ \phi(p) = \phi^{-1} \circ Df(p)(0) = \phi^{-1}(0) = p,$$

$$Df_1(p) = D\phi^{-1}(0) \circ Df(p) \circ D\phi(p) = (D\phi^{-1})(p) \circ Df(p) \circ D\phi(p).$$

Ce qui signifie que p est aussi un point fixe de f_1 et qu'il est elliptique non dégénéré puisque les applications $Df(p)$ et $Df_1(p)$ sont conjuguées.

Comme l'application f_1 est égal à f hors de U nous allons montrer la proposition en remplaçant f par f_1 . Pour simplifier les notations, nous allons confondre f et f_1 .

Le point p étant un point fixe elliptique non dégénéré, $Df(p)$ possède deux valeurs propres complexes conjuguées distinctes, α et $\bar{\alpha}$. Elle est donc conjuguée à la rotation d'angle α de \mathbb{R}^2 . Plus précisément, il existe $u : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire bijective telle que :

- $u^*dx \wedge dy = \omega_p$,
- $u^{-1} \circ Rot_\alpha \circ u = Df(p)$,

où Rot_α est la rotation d'angle α de \mathbb{R}^2 . Ainsi :

$$f(x) = (u \circ \phi)^{-1} \circ Rot_\alpha \circ u \circ \phi(x), \quad \forall x \in V.$$

Comme $u \circ \phi$ est un difféomorphisme de W_1 sur le voisinage $u(W_2)$ de $u(0) = 0$, $u \circ \phi(V)$ est un voisinage de $u \circ \phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^2$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :

$$B(0, \varepsilon) \subseteq u \circ \phi(V) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Considérons l'application

$$j : \mathbb{T}^1 \times]0; \pi^2 \varepsilon^2[\rightarrow \mathbb{R}^2$$

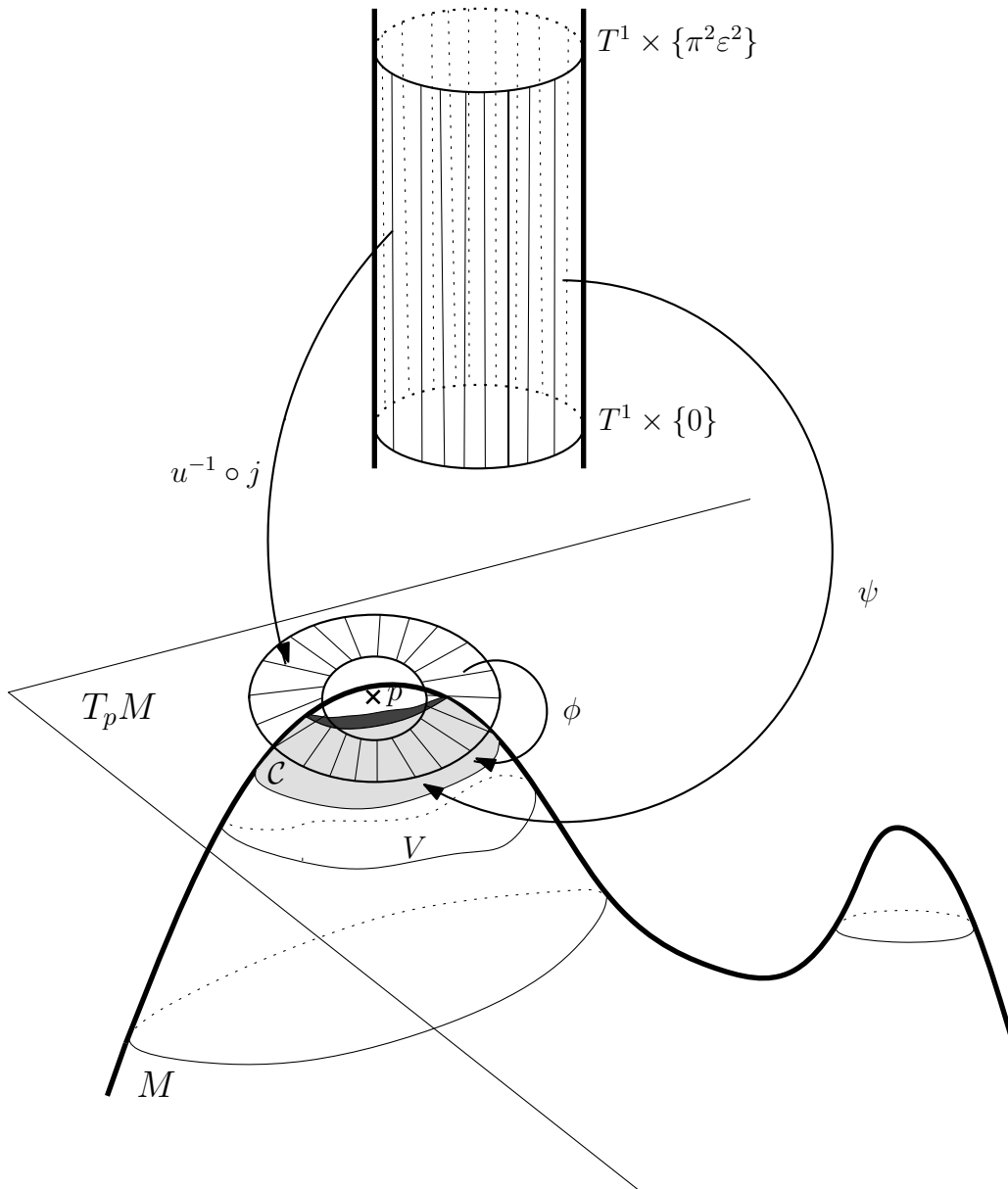
$$(\theta, r) \mapsto \left(\sqrt{\frac{r}{\pi}} \cos(2\pi\theta), \sqrt{\frac{r}{\pi}} \sin(2\pi\theta) \right)$$

Cette application est un difféomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times]0; \pi^2 \varepsilon^2[$ sur $B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$. On peut donc alors définir une application ψ par :

$$\psi : \mathbb{T}^1 \times]0; \pi^2 \varepsilon^2[\longrightarrow M$$

$$(\theta, r) \longmapsto (u \circ \phi)^{-1} \circ j(\theta, r).$$

puis le sous ensemble $\mathcal{C} = \psi(\mathbb{T}^1 \times]0; \pi^2 \varepsilon^2[)$ inclus dans V .



LEMME 4.2. . — l'application ψ est un difféomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times]0; \pi^2 \varepsilon^2[$ dans \mathcal{C} de classe C^1 tel que $\psi^* \omega = d\theta \wedge dr$. De plus :

- le point p n'appartient pas à \mathcal{C} ,
- l'application f coïncide avec $\psi \circ \rho_\alpha \circ \psi^{-1}$ sur \mathcal{C} .

Preuve du lemme 4.2. — L'application ψ est un difféomorphisme parce qu'elle est une composée de difféomorphismes. De plus, pour tout (θ, r) dans $\mathbb{T}^1 \times]0; \pi^2 \varepsilon^2[$,

$$Dj(\theta, r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos(2\pi\theta) & -2\pi\sqrt{r} \sin(2\pi\theta) \\ \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin(2\pi\theta) & 2\pi\sqrt{r} \cos(2\pi\theta) \end{pmatrix}$$

Donc $\det(Dj(\theta, r)) = 1$. Ainsi, $j^*dx \wedge dy = d\theta \wedge dr$. Or $u^*dx \wedge dy = \omega_p$ et $\phi^*\omega = \omega$. Par conséquent :

$$\psi^*\omega = d\theta \wedge dr.$$

Comme p est égale à $(u \circ \phi)^{-1}(0)$ et que 0 n'appartient pas à $j(\mathbb{T}^1 \times]0; \pi^2 \varepsilon^2[)$, p n'appartient pas à \mathcal{C} . De plus l'application f est égale à $(u \circ \phi)^{-1} \circ Rot_\alpha \circ u \circ \phi$ sur V et si (θ, r) appartient à $\mathbb{T}^1 \times]0; \pi^2 \varepsilon^2[$ alors $\psi(\theta, r)$ appartient à \mathcal{C} qui est inclus dans V . Donc :

$$\begin{aligned} f \circ \psi(\theta, r) &= (u \circ \phi)^{-1} \circ Rot_\alpha \left(\sqrt{\frac{r}{\pi}} \cos(2\pi\theta), \sqrt{\frac{r}{\pi}} \sin(2\pi\theta) \right) \\ &= (u \circ \phi)^{-1} \left(\sqrt{\frac{r}{2\pi^2}} \cos(2\pi(\theta + \alpha)), \sqrt{\frac{r}{2\pi^2}} \sin(2\pi(\theta + \alpha)) \right) \\ &= \psi(\theta + \alpha, r) = \psi \circ \rho_\alpha(\theta, r) \end{aligned}$$

Ainsi $f(x) = \psi \circ \rho_\alpha \circ \psi^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. ■

Soit $r \in]0; \pi^2 \varepsilon^2[$. Notons ψ_r la courbe fermée simple définie par :

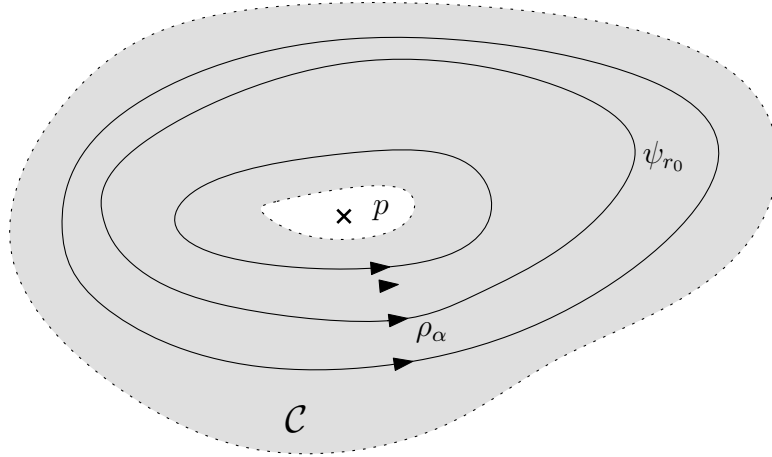
$$\begin{aligned} \psi_r : \mathbb{T}^1 &\rightarrow M \\ \theta &\mapsto \psi(\theta, r) \end{aligned}$$

Ainsi l'image de ψ_r est incluse dans \mathcal{C} . De plus pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$:

$$f(\psi_r(\theta)) = \psi_r(\theta + \alpha) = \psi_r(R_\alpha(\theta)),$$

ce qui signifie que la courbe ψ_r est invariante par f et que sur cette courbe f est conjuguée à la rotation d'angle α .

De plus $\psi'_r(\theta) \neq 0$, pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$ car ψ est la composée des difféomorphismes ϕ^{-1} , u^{-1} et j .



Fixons $r_0 \in]0; \pi^2 \varepsilon^2[$. Nous allons perturber f sur un voisinage de ψ_{r_0} . Pour cela nous allons travailler avec ρ_α sur un voisinage de $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < r_0 < b < \pi^2 \varepsilon^2$. Il s'agit de construire ρ dans un voisinage convenable de ρ_α de telle sorte que :

$$- \rho(\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}) = \mathbb{T}^1 \times \{r_0\},$$

- ρ possède un nombre fini de points périodiques sur $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$, tous hyperboliques,
- $\rho = \rho_\alpha$ sur $\mathbb{A} \setminus \mathbb{T}^1 \times]a; b[$.

Puis de poser, à condition que ce soit bien défini :

$$F : M \rightarrow M$$

$$x \mapsto \begin{cases} \psi \circ \rho \circ \psi^{-1}(x) & \text{si } x \in \mathcal{C} \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons avoir trouver ρ , que F est bien définie et appartient à \mathcal{U} . Vérifions avant de passer à cette construction que l'application F et la courbe ψ_{r_0} conviennent.

Comme ρ coïncide avec ρ_α hors de $\mathbb{T}^1 \times]a; b[$, l'application F coïncide avec $\psi \circ \rho_\alpha \circ \psi^{-1}$ sur $\mathcal{C} \setminus \psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)$. Mais nous avons vu que $f = \psi \circ \rho_\alpha \circ \psi^{-1}$ sur \mathcal{C} (cf. le lemme 4.2). Par conséquent F coïncide avec f sur $\mathcal{C} \setminus \psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)$. Or F coïncide aussi avec f hors de \mathcal{C} . Nous obtenons donc que F coïncide avec f sur $M \setminus \psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)$.

Nous obtenons ainsi que l'application F coïncide avec f hors de U car $\psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)$ est inclus dans U . Le point p est un point fixe elliptique de F car p appartient à l'ouvert $M \setminus \psi(\mathbb{T}^1 \times [a; b])$ sur lequel F coïncide avec f .

De plus, l'application F étant égale à $\psi \circ \rho \circ \psi^{-1}$ sur $\psi_{r_0}(\mathbb{T}^1)$, la courbe ψ_{r_0} est invariante par F qui possède, comme ρ , un nombre fini de points périodiques sur $\psi_{r_0}(\mathbb{T}^1)$ tous hyperboliques.

Le fait que p appartient à une composante connexe de $M \setminus \psi_{r_0}(\mathbb{T}^1)$ incluse dans U vient du fait que $p = (u \circ \phi)^{-1}(0)$ appartient à $(u \circ \phi)^{-1}(B(0, \sqrt{\frac{r_0}{\pi}}))$ qui est une composante connexe relativement compacte de $M \setminus \psi_{r_0}(\mathbb{T}^1)$ incluse dans U .

Il s'agit donc de construire ρ tel qu'il a été décrit ci-dessus, dans un voisinage convenable de ρ_α pour que F soit bien définie et appartienne à \mathcal{U} . Nous aurons alors montré que F et ψ_{r_0} vérifient le théorème 4.1.

Considérons \mathcal{V} un voisinage de $f|_{\psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)}$ dans $\mathcal{C}_\omega^1(\psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[), M)$ tel que si une application $g : M \rightarrow M$ vérifie :

- g coïncide avec f hors de $\psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)$,
 - g restreinte à $\psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)$ appartienne à \mathcal{V} .
 - g est de classe C^1 et $g^*\omega = \omega$
- } alors $g \in \mathcal{U}$.

Soit \mathcal{W} un voisinage de ρ_α dans $\mathcal{C}_\omega^1(\mathbb{A})$ tel que pour tout $\rho \in \mathcal{W}$:

- $\rho(\mathbb{T}^1 \times [a; b])$ est inclus dans $\mathbb{T}^1 \times]0; \pi^2 \varepsilon^2[$ (ceci est vrai pour $\rho = \rho_\alpha$ car $\rho_\alpha(\mathbb{T}^1 \times [a; b]) = \mathbb{T}^1 \times [a; b])$,
- $\psi \circ \rho \circ \psi|_{\psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)}^{-1}$ appartient à \mathcal{V} (ceci est vrai pour $\rho = \rho_\alpha$ car $\psi \circ \rho_\alpha \circ \psi|_{\psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)}^{-1} = f|_{\psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)}$ appartient à \mathcal{V}).

Appliquons la proposition 3.2 à ρ_α et \mathcal{W} : il existe $\rho \in \mathcal{W}$ tel que :

- $\rho(\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}) = \mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$,
- ρ possède un nombre fini de points périodiques sur $\mathbb{T}^1 \times \{r_0\}$, tous hyperboliques,
- $\rho = \rho_\alpha$ sur $\mathbb{A} \setminus \mathbb{T}^1 \times]a; b[$.

Comme $\rho \in \mathcal{W}$ et que $\rho = \rho_\alpha$ hors de $\mathbb{T}^1 \times]a; b[$, l'image par ρ de $\mathbb{T}^1 \times]0; \pi^2 \varepsilon^2[$ est inclus dans lui-même. Par conséquent, l'application F est bien définie.

L'application F restreinte à $\psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)$ est égale à $\psi \circ \rho_\alpha \circ \psi|_{\psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)}^{-1}$ qui appartient à \mathcal{V} (car ρ

appartient à \mathcal{W}).

Elle est de plus de classe C^1 et préserve ω car elle est de classe C^1 et préserve ω sur les deux ouverts \mathcal{C} et $M \setminus \psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)$ dont la réunion est M . En effet :

- F coïncide avec f sur $M \setminus \psi(\mathbb{T}^1 \times]a; b[)$,
- $F = \psi \circ \rho \circ \psi^{-1}$ sur \mathcal{C} .

Par conséquent, F appartient à \mathcal{U} .

La proposition est donc prouvée dans le cas particulier où p est un point fixe de f . Voici comment on déduit le cas général de ce cas particulier.

Tout d'abord quitte à réduire U , on peut supposer que $U, \dots, f^{k-1}(U)$ sont deux à deux disjoints puisque k étant la période de p sous f , $p, f(p), \dots, f^{k-1}(p)$ sont deux à deux disjoints.

Considérons

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Diff}_\omega^1(M) &\rightarrow \text{Diff}_\omega^1(M) \\ g &\rightarrow g \circ f^{1-k} \end{aligned}$$

L'ensemble $\text{Diff}_\omega^1(M)$ étant muni de la topologie C^1 forte de Whitney, l'application Φ est continue. Comme $\Phi(f^k) = f$, il existe \mathcal{V} un voisinage de f^k dans $\text{Diff}_\omega^1(M)$ tel que $\Phi(\mathcal{V})$ est inclus dans \mathcal{U} .

Le point p étant un point fixe elliptique non dégénéré pour f^k (cf la proposition 1.5 du chapitre 2), nous pouvons donc appliquer ce qui précède. Il existe $g \in \mathcal{V}$, une courbe $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow M$ de classe C^1 tels que :

- p est un point fixe elliptique de période pour g ,
- $\gamma(\mathbb{T}^1) \subseteq U$ et p appartient à une composante connexe de $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ incluse dans U ,
- la courbe $\gamma(\mathbb{T}^1)$ est invariante par g et g possède un nombre fini de points périodiques sur $\gamma(\mathbb{T}^1)$ tous hyperboliques,
- l'application g coïncide avec f^k hors de U .

Posons $F = \Phi(g)$.

Il s'agit alors de vérifier que F et γ ainsi définis vérifient la proposition. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que F coïncide avec f hors de $f^{k-1}(U)$, ce qui permet alors de montrer en utilisant que $U, \dots, f^{k-1}(U)$ sont deux à deux disjoints que F^k coïncide avec g sur U . De cela, on tire facilement que F et γ vérifient les assertions de la proposition. \square

REMARQUE 4.3. — La courbe γ construite dans la preuve ci-dessus a son image dans un voisinage V de p difféomorphe à une boule de \mathbb{R}^2 et donc au plan lui-même. Ainsi la composante connexe de $M \setminus \gamma(\mathbb{T}^1)$ contenant p n'est autre que $\text{int}_V(\gamma)$ définie dans le premier paragraphe du troisième chapitre.

BIBLIOGRAPHIE

- [AbMa78] R. ABRAHAM and J. MARSEN, *Foundations of mechanics*, New York, Benjamin/Cummings, Second edition, 1978.
- [Ar01] M.-C. ARNAUD, Créations de Connexions en topologie C^1 , *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 21, 2001, pp. 339-381.
- [ABC05] M.-C. ARNAUD, C. BONATTI et S. CROVISIER, Dynamiques symplectiques génériques, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 25, 2005, pp. 1-36.
- [Ar76] V. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Moscou, Editions MIR, 1976.
- [ArAv67] V. ARNOLD and A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1967.
- [Bi22] G.-D. BIRKHOFF, Surface transformations and their dynamical applications, *Acta Math.*, 43, n° 1, 1922, pp. 1-119.
- [Bi32a] G.-D. BIRKHOFF, Sur l'existence de régions d'instabilité en dynamique. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 2, n° 4, 1932, pp. 369-386.
- [Bi32b] G.-D. BIRKHOFF, Sur quelques courbes fermées remarquables, *Bull. Soc. Math. France*, 60, 1932, pp. 1-26.
- [BC04] C. BONATTI et S. CROVISIER, Récurrence et genericité. *Inventiones Mathematicae*, 2004, pp. 33-104.
- [Ch83] A. CHENCINER, La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif : de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather, *Séminaire N. Bourbaki*, n° 622, 1983-1984, pp. 147-170.
- [Fa] A. FATHI, The Theorems of Carathéodory and Schoenflies. Manuscrit non publié.
- [Go01] C. GOLÉ, *Symplectic Twists Maps*, Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.
- [Ha97] S. HAYASHI, Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and ω -stability conjectures for flows. *Annals of mathematics*, 145, n° 1, 1997, pp. 81-137.
- [He83] M.-R. HERMAN, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, *Astérisque*, 103-104, n° 1, Société Mathématiques de France, 1983.
- [Hi76] M.-W. HIRSCH, *Differential Topology*, New-York Heidelberg Berlin, Springer-Verlag, 1976.
- [Ka95] A. KATOK and B. HASSELBLAT, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.
- [LC90] P. LE CALVEZ, Etude topologique des applications déviant la verticale, *Ensaio matemáticos*, tome 2, Rio de Janeiro, Sociada de brasileira de Matemática, 1990.

- [Mo77] E.-E. MOÏSE, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, New-York Heidelberg Berlin, Springer-Verlag, 1977.
- [Nh] S. NEWHOUSE, Topics in conservative dynamics, University of North Carolina.
- [Nm92] M.-H.-A. NEWMAN, *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, New York, Dover Publications INC., Second edition, 1992.
- [PaMe82] J. PALIS and W. DE MELO, *Geometric Theory of Dynamical Systems, An Introduction*, New-York Heidelberg Berlin, Springer-Verlag, 1982.
- [Po] H. POINCARÉ, Equations de la dynamique et problème des n corps, *Acta Math.*, 13, n° 1, 1890.
- [Pu67] C. PUGH, The Closing Lemma, *American Journal of Mathematics*, 89, 1967, pp. 956-1009.
- [Ro99] C. ROBINSON, *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, Boca Raton London New-York Washington, CRC Press, Second Edition, 1999.
- [Ro70] C. ROBINSON, Generic Properties of conservative systems, *American Journal of Mathematics*, 92, n° 3, 1970, pp. 562-603.
- [Sh78] M. SHUB, stabilité globale des systèmes dynamiques, *Astérisque*, 92, Société Mathématiques de France, 1978.
- [Yo06] J.-C. YOCOZ, Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré, *Gaz. Math.*, 107, 2006, pp. 19-26.
- [Ze73] E. ZEHNDER, Homoclinic points near elliptic fixed points, *Comm. Pure Appl. Math.*, 26, 1973, pp. 131-182.

TABLE DES MATIERES

Introduction	5
 Chapitre I. Courbes continues sur une surface symplectique, un point de vue topologique	 11
1 Application continue de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{T}^1	14
2 Résultats généraux de topologie plane	18
2.1 Correspondances topologiques entre la sphère, le plan et l’anneau	18
2.2 Homotopie et simple connexité	19
2.3 Théorème de Jordan	21
2.4 Le théorème de Schoenflies	22
2.5 Etude des courbes d’un anneau	22
2.6 Homéomorphismes préservant l’orientation, surface orientable	26
2.7 Arcs et courbes orientés	27
3 Construction d’une famille dénombrable d’anneaux constituant une base de voisinages d’une courbe simple quelconque sur une surface orientable.	32
3.1 Construction d’un anneau voisinage d’une courbe simple	32
3.2 Triangulation d’une surface	37
3.3 Construction d’une famille dénombrable d’anneaux constituant une base de voisinages d’une courbe quelconque	40
 Chapitre II. Génériquement, une courbe fermée simple invariante contient un point périodique elliptique	 49
1 Préliminaires et résultats connus	52
1.1 Points périodiques d’un difféomorphisme symplectique	52
1.2 Etude de l’espace des difféomorphismes symplectiques d’une surface	56
1.3 Le Connecting Lemma	58
1.4 A propos des courbes invariantes des difféomorphismes symplectiques exacts ou non de l’anneau	61
2 Une conséquence du Connecting Lemma sur l’étude des courbes invariantes par un difféomorphisme symplectique générique	64
2.1 Cas de l’anneau	64

2.2	Cas d'une surface quelconque	69
3	Etude des points périodiques hyperboliques sur une courbe fermée simple invariante	74
3.1	Variété stable et variété instable transverses	75
3.2	Preuve de la proposition 3.1	76
	Appendice I	79

Chapitre III. Etude des points périodiques elliptiques sur une courbe fermée simple invariante 83

1	Courbe fermée simple sur une surface	85
2	Propriété Γ	87
2.1	Définition de la propriété Γ	87
2.2	Propriété Γ et courbes invariantes	89
3	Propriété Γ et perturbations de difféomorphismes symplectiques	91
3.1	Premier résultat de perturbation à propos de la propriété Γ	91
3.2	Second résultat de perturbation à propos de la propriété Γ	106
3.3	Encore un G_δ dense de l'ensemble des difféomorphismes symplectiques de M	109
4	Conclusion	112
	Appendice I	114
	Appendice II	116

Chapitre IV. Perturber une application symplectique 131

1	Outils de perturbation	134
1.1	A propos de la topologie de Whitney	134
1.2	Fonctions génératrices sur un ouvert du plan	136
1.3	Fonctions génératrices sur l'anneau	143
2	Perturber un difféomorphisme symplectique d'une surface au voisinage d'un point	149
2.1	Linéariser une application symplectique d'une surface au voisinage d'un point périodique	149
2.2	Perturber la différentielle d'un difféomorphisme symplectique d'une surface	161
3	Perturber une rotation de l'anneau	168
4	Application : Entourer un point périodique elliptique d'une courbe fermée simple invariante de classe C^1	175

Bibliographie 182

Résumé : Au début du XX^{ème} siècle, Poincaré puis Birkhoff ont été amenés, lors de leur recherche sur le problème restreint des trois corps, à étudier les courbes invariantes par une transformation d'une surface préservant l'aire. Cinquante ans plus tard, les théorèmes KAM démontrent la persistance de courbes invariantes après perturbation en topologie de classe k plus grande ou égale à trois. On peut alors se demander ce que devient ce résultat en topologie de classe moins élevée. Par ailleurs, l'étude des dynamiques C^1 -génériques connaît de nombreux développements, grâce notamment au Connecting Lemma. Par exemple, Bonatti et Crovisier ont démontré qu'un difféomorphisme C^1 -générique d'une telle surface possède un ensemble dense de points dont l'orbite sort de tout compact. Ces deux résultats permettent de penser qu'un difféomorphisme C^1 -générique d'une surface n'admet pas de courbes fermées simples invariantes. C'est ce que nous démontrons dans ce travail. On obtient assez facilement, en utilisant le Connecting Lemma ainsi que les propriétés topologiques de l'anneau, qu'un difféomorphisme C^1 -générique de l'anneau possède des points périodiques sur toute courbe fermée simple invariante. Cela se généralise à une surface quelconque en utilisant une famille dénombrable d'anneaux constituant une base de voisinages d'une courbe fermée simple quelconque. La construction d'une telle famille d'anneaux est le principal résultat du premier chapitre. Il s'agit alors de supprimer les points périodiques sur les courbes invariantes. Dans un premier temps, nous nous inspirerons d'un argument qu'Herman utilise dans le cadre de courbes invariantes par les twists de l'anneau pour montrer que tous les points périodiques ne peuvent être hyperboliques. Ensuite, nous définissons une propriété, la propriété Γ , qui si elle est vérifiée par un difféomorphisme symplectique et l'un de ses points périodiques elliptiques, empêche que ce point périodique appartienne à une courbe invariante. En montrant que cette propriété est vérifiée par un difféomorphisme C^1 -générique et tous ses points périodiques elliptiques, nous obtenons le résultat souhaité. Dans le quatrième chapitre, nous nous employons à définir de façon rigoureuse la notion de fonction génératrice qui est l'outil classique pour perturber des difféomorphismes symplectiques.

Abstract : Poincaré and Birkhoff were led, during their research on the restricted problem of three bodies, to study invariant curves under an area preserving map of a surface. Fifty years later, theorems KAM show the persistence of invariant curves in topology C^k with k greater or equal to three. What becomes this result in topology class lower. Moreover, the study of C^1 -generic dynamics knows many developments particularly through the Connecting Lemma. For example, Bonatti and Crovisier showed a C^1 -generic symplectic diffeomorphism of a compact surface is transitive. What they have adapted with M.-C. Arnaud to a non compact surface : a C^1 -generic symplectic diffeomorphism of a non compact surface has a dense set of points whose orbit leaves every compact. These two results suggest a such application has not an invariant simple closed curve. The proof of this result is the aim of this work. We obtain, using the Connecting Lemma, a C^1 -generic symplectic diffeomorphism has periodic points on all the invariant curves. Then, deleting the periodic points from the invariant curves is the challenge. At first, we use an argument that Herman used in the context of curves invariant by a twist of annulus, to show that all periodic points cannot be hyperbolic. Then, we define a property, the property Γ , which, if it is verified by a symplectic diffeomorphism and one of its periodic elliptic points, prevents this periodic point belongs to an invariant curve. By showing that property is verified by a C^1 -generic symplectic diffeomorphism, we obtain the desired result. In the fourth chapter, we explain how to perturb a symplectic diffeomorphism with generating functions.

Mots-Clefs : Difféomorphisme symplectique, surface, courbe fermée simple invariante, Connecting Lemma, points périodiques elliptiques, points périodiques hyperboliques, variétés stable et in-

stable.