



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

MAISON DE LA
RECHERCHE

AVIS DE SOUTENANCE DE THESE DE DOCTORAT

Mademoiselle Marie GIRARD soutiendra une thèse
le 18 décembre 2009 à 14h

Salle des thèses

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES ED 166

Titre de la thèse : Sur les courbes invariantes par un difféomorphisme symplectique générique de classe C^1 d'une surface.

Membres du jury :

LE CALVEZ Patrice, PR Mathématiques, Université Paris 7,
BONATTI Christian, PR Mathématiques, Université de Bourgogne,
CROVISIER Sylvain, CR Mathématiques, Université Paris XIII,
BARBOT Thierry, PR Mathématiques, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse,
ARNAUD Marie-Claude, PR Mathématiques, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse.

Résumé de la thèse :

Au début du vingtième siècle, Poincaré et Birkhoff ont été amenés, lors de leur recherche sur le problème restreint des trois corps, à l'étude des courbes invariantes par une transformation d'une surface préservant l'aire.

Cinquante ans plus tard, le théorème des courbes invariantes, connu sous le nom de théorème KAM pour Kolmogorov, Arnold et Moser, démontre la persistance de courbes invariantes après perturbation en topologie de classe k plus grande ou égale à trois. On peut alors se demander ce que devient ce résultat en topologie de classe moins élevée.

Par ailleurs, depuis une vingtaine d'années, l'étude des dynamiques C^1 -génériques connaît de nombreux développements, grâce notamment au Connecting Lemma. Par exemple, Bonatti et Crovisier ont démontré qu'un difféomorphisme symplectique de classe C^1 -générique d'une surface compacte est transitif, c'est-à-dire qu'il possède une orbite dense. Ce qu'ils ont adapté avec M.-C. Arnaud à une surface non compacte : un difféomorphisme symplectique C^1 -générique d'une telle surface possède un ensemble dense de points dont l'orbite positive sort de tout compact. Ces deux résultats permettent alors de penser qu'un difféomorphisme symplectique C^1 -générique d'une surface n'admet pas de courbes fermées simples invariantes. C'est ce que nous démontrons dans ce travail.

On obtient assez facilement, en utilisant le Connecting Lemma ainsi que les propriétés topologiques de l'anneau, qu'un difféomorphisme C^1 -générique de l'anneau possède des points périodiques sur toute courbe fermée simple invariante. Cela se généralise à une surface quelconque en utilisant une famille dénombrable d'anneaux constituant une base de voisinages d'une courbe continue fermée simple quelconque. La construction de cette famille d'anneaux est le principal résultat du premier chapitre.

Il s'agit alors de supprimer les points périodiques sur les courbes invariantes. Dans un premier temps, nous nous inspirons d'un argument qu'Herman utilise dans le cadre de courbes invariantes par les twists de l'anneau pour montrer que tous les points périodiques ne peuvent être hyperboliques. Ensuite, nous définissons une propriété, la propriété γ , qui, si elle est vérifiée par un difféomorphisme symplectique et l'un de ses points périodiques elliptiques, empêche que ce point périodique appartienne à une courbe invariante. En montrant que cette propriété est vérifiée par un difféomorphisme C^1 -générique et tous ses points périodiques elliptiques, nous obtenons le résultat souhaité.

Le quatrième chapitre est consacré à l'aspect le plus technique de ce travail : perturber des difféomorphismes symplectiques. Nous nous employons notamment à définir de façon rigoureuse la notion de fonction génératrice qui est l'outil classique pour perturber des difféomorphismes symplectiques.

UNIVERSITÉ D'AVIGNON
ET DES PAYS DE VAUCLUSE
COLLEGE DES ETUDES DOCTORALES
CASE 20
74 rue Louis Pasteur
84029 AVIGNON CEDEX 1
<http://www.univ-avignon.fr>
tél : +33(0)4 90 16 25 29
fax : +33(0)4 90 16 27 44
joelle.derbaise@univ-avignon.fr